MATHS. CORRECTION

EXERCICE 01

On donne deux complexes p et q **non nuls** et on considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$(E) : z^2 - 2pz + q = 0.$$

On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation (E).

1. On part de $z^2 - 2pz + q = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2) + z_1 z_2$. Et donc :

$$p = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \text{ et } q = z_1 z_2.$$

2. Si z_1 ou z_2 est nul alors q est nul, contradictoire.

3. Pour tout couple de réels (θ_1, θ_2), partons de $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$. Il vaut :

$$e^{i\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta_1}{2}-\frac{\theta_2}{2}\right)} + e^{i\left(-\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}\right)}\right).$$

Or : $2\cos\left(\dfrac{\theta_1}{2} - \dfrac{\theta_2}{2}\right) = e^{i\left(\frac{\theta_1}{2}-\frac{\theta_2}{2}\right)} + e^{i\left(-\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}\right)}$. On a bien :

$$e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}\right)}.$$

4. On suppose **dans cette question** que $|z_1| = |z_2|$. On pose alors $z_1 = re^{i\theta_1}$ et $z_2 = re^{i\theta_2}$.
D'après **1**, $2p = z_1 + z_2 = re^{i\theta_1} + re^{i\theta_2}$. On en déduit :

$$2p = 2r\cos\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}\right)}.$$

Et donc :

$$p^2 = r^2\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

De même, $q = z_1 z_2 = r^2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. On en déduit $\dfrac{p^2}{q}$.

$$\frac{p^2}{q} = \frac{r^2\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{r^2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}} = \cos^2\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right).$$

On a bien $\dfrac{p^2}{q} = \cos^2 t$, où $t = \dfrac{\theta_1}{2} - \dfrac{\theta_2}{2}$.

5-a On suppose ici que $\dfrac{p^2}{q}$ est réel et appartient à $]0, 1]$ et donc il existe un réel $\lambda \geqslant 1$ tel que $q = \lambda p^2$.
On commence à calculer $\Delta = 4p^2 - 4q = 4p^2 - 4\lambda p^2 = 4p^2(1 - \lambda) = 4i^2p^2(\lambda - 1)$.
On en déduit :

$$z_1 = \frac{2p + 2ip\sqrt{\lambda - 1}}{2} = p(1 + i\sqrt{\lambda - 1}) \text{ et } z_2 = \frac{2p - 2ip\sqrt{\lambda - 1}}{2} = p(1 - i\sqrt{\lambda - 1}).$$

5-b On a : $|z_1|^2 = |p|^2(1 + \lambda - 1) = \lambda p\overline{p}$.

5-c. Il est clair que $|z_2|^2 = \lambda p\overline{p} = |z_1|^2$ et donc les modules de z_1 et de z_2 sont égaux.

On peut donc conclure que z_1 et z_2 ont le même module si et seulement si $\dfrac{p^2}{q}$ est réel et appartient à l'intervalle $]0, 1]$.

6. On suppose que $\arg(z_1) = \arg(z_2)\,(2\pi)$. On pose $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta}$.
Écrivons $\dfrac{q}{p^2}$ en fonction de r_1 et r_2.

$$p = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{e^{i\theta}}{2}(r_1 + r_2) \Rightarrow p^2 = \frac{e^{2i\theta}}{4}(r_1 + r_2)^2.$$

$$q = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{2i\theta}.$$

On regroupe.

$$\frac{q}{p^2} = \frac{r_1 r_2 e^{2i\theta}}{\dfrac{e^{2i\theta}}{4}(r_1 + r_2)^2} = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

7. Démontrons l'inégalité arithmético-géométrique : $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $\forall y \in \mathbb{R}^\star$, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
On multiplie par 2 de chaque côté puis on élève au carré les deux membres de l'inégalité, comme tout le monde est positif, on obtient une inégalité équivalente.

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ \forall y \in \mathbb{R}^\star,\ \left(2\sqrt{xy}\right)^2 \leqslant (x+y)^2.$$

On transforme en faisant passer le membre de gauche à droite.

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ \forall y \in \mathbb{R}^\star,\ 0 \leqslant (x+y)^2 - 4xy.$$

Ou encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ \forall y \in \mathbb{R}^\star,\ 0 \leqslant (x-y)^2.$$

Cette dernière inégalité est donc vraie.
8. • *On suppose que z_1 et z_2 ont les mêmes arguments*
D'après **6**, on sait que $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}$ et cette quantité est réelle et strictement positive. Il reste à prouver qu'elle appartient à $]0, 1]$.

$$\frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 4r_1 r_2 \leqslant (r_1 + r_2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{r_1 r_2} \leqslant \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

C'est l'inégalité arithmético-géométrique.
• *Sens réciproque*
On suppose que $\dfrac{q}{p^2} \in]0, 1]$. Alors $q = \lambda p^2$ avec $\lambda \in]0, 1]$.
Le discriminant Δ de (E) est alors $4p^2 - 4q = 4p^2 - 4\lambda p^2 = 4p^2(1 - \lambda)$.
Alors $z_1 = p(1 - \sqrt{1-\lambda})$ et $z_2 = p(1 + \sqrt{1-\lambda})$. On remarque que $1 - \sqrt{1-\lambda}$ et $1 + \sqrt{1-\lambda}$ sont strictement positifs.
Alors $\arg(z_1) = \arg(z_2) = \arg(p)$
• *On peut conclure*
z_1 et z_2 ont les mêmes arguments si et seulement si $\dfrac{q}{p^2}$ est réel et appartient à $]0, 1]$.
9. z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si leurs modules et arguments le sont aussi donc si et seulement si $q = p^2$. On peut retrouver directement avec (E) car c'est le cas $\Delta = 0$.

EXERCICE 02

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $x_0 = y_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} & = & \sqrt{7 + x_n} \end{array}\right.$.

1. Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $x_n \in [0,7]$ et $y_n \in [0,7]$ ».

• *Initialisation*

Il est clair que $x_0 = 0 \in [0,7]$ et $y_0 = 0 \in [0,7]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *transmission*

Supposons la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $x_n \in [0,7]$ et $y_n \in [0,7]$ » vraie.

$$0 \leqslant y_n \leqslant 7 \Rightarrow 0 \leqslant 7 - y_n \leqslant 7 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{7 - y_n} = x_{n+1} \leqslant 7.$$

$$0 \leqslant x_n \leqslant 7 \Rightarrow 7 \leqslant 7 + x_n \leqslant 14 \Rightarrow \sqrt{7} \leqslant \sqrt{7 + x_n} = y_{n+1} \leqslant \sqrt{14} \leqslant 7.$$

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2. On suppose que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels a et b. On utilise les relations entre x_n et y_n. En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+1} = b$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \sqrt{7-b} \\ b & = & \sqrt{7+a} \end{array}\right. .$$

On utilise le fait que a et b sont nécessairement dans $[0,7]$. On élève au carré les expressions.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & 7-b \\ b^2 & = & 7+a \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b^2-a^2 & = & a+b \\ b^2 & = & 7+a \end{array}\right. .$$

L'égalité $b^2 - a^2 = a + b$ se transforme en $(b-a)(b+a) = b + a$. Si $b + a = 0$, comme a et b sont dans $[0,7]$, et s'ils sont opposés, alors $a = b = 0$ et c'est impossible car $b^2 = 7 + a$. Donc il reste $b - a = 1$ c'est-à-dire $b = a + 1$. On remplace dans $b^2 = 7 + a$.

$$(a+1)^2 = 7 + a \Rightarrow a^2 + 1 + 2a = 7 + a \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0.$$

On obtient $a = -3$ ou $a = 2$. Comme $a = -3$ est verboten, il reste $a = 2$.
Enfin $b^2 = 7 + a = 9$ donc $b = 3$.

On pose dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = x_n - 2$ et $t_n = y_n - 3$.

3. $s_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} - 2 = \dfrac{(\sqrt{7-y_n} - 2)(\sqrt{7-y_n} + 2)}{\sqrt{7-y_n} + 2} = \dfrac{3 - y_n}{\sqrt{7-y_n} + 2}$.

On a bien : $|s_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_n|$ car $\sqrt{7-y_n} + 2 \geqslant 2$.

De même, $t_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} - 3 = \dfrac{(\sqrt{7+x_n} - 3)(\sqrt{7+x_n} + 3)}{\sqrt{7+x_n} + 3} = \dfrac{x_n - 2}{\sqrt{7+x_n} + 3}$.

On a bien : $|t_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{3}|s_n|$ car $\sqrt{7+x_n} + 3 \geqslant 3$.

4. On en déduit que $|s_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}|s_n|$. Donc $\alpha = \dfrac{1}{6}$.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_{n+2}| \leqslant \alpha|s_n|$. On l'applique pour $n = 0$ et $s_0 = 2$. puis pour $n = 2$ puis $n = 4$ jusqu'à $n = 2p$ où p est un entier non nul.

$$|s_{2p}| \leqslant \alpha^p |s_0|.$$

On remarque que $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha^p|s_0| = 0$ car $\alpha = 1/6 \in [0,1[$. Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} s_{2p} = 0$.
De même, en partant de $n = 1$ puis $n = 3$ jusqu'à $n = 2p+1$, où p est un entier,

$$|s_{2p+1}| \leqslant \alpha^p |s_1|.$$

On remarque toujours que $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha^p|s_0| = 0$ car $\alpha = 1/- \in [0,1[$. Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} s_{2p+1} = 0$.
En conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

Par ailleurs l'inégalité $|t_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{3}|s_n|$ permet d'écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.
Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 3$.

EXERCICE 03

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+\sin^3 x)^{1/4}$ définie pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. f est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{4}\ln\left(1+\sin^3 x\right)\right).$$

La fonction $x \mapsto 1+\sin^3 x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $u \mapsto \ln u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $u \mapsto \exp(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. On peut écrire directement :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) = \frac{3}{4}\sin^2 x\cos x(1+\sin^3 x)^{-3/4}.$$

Alors $f'(x) > 0$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur son domaine de définition et la fonction f est croissante sur ce même domaine de définition.

3. On pose $x = -\frac{\pi}{2} + t$. Écrivons $g(t) = f(x)$.

$$g(t) = f\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \left(1+\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\right)^{1/4}.$$

Or $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = -\cos t$ et donc $\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = -\cos^3 t$. On obtient :

$$g(t) = f\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \left(1-\cos^3 t\right)^{1/4}.$$

Écrivons $h(t) = f'(x)$.

$$h(t) = f'\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \frac{3}{4}\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\left(1+\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\right)^{-3/4}.$$

Comme $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \sin t$, on obtient :

$$h(t) = f'\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \frac{3}{4}\cos^2 t\sin t\left(1-\cos^3 t\right)^{-3/4}.$$

4. Question pour donner facilement des points.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ \sin t = t + o(t^2).$$

Puis : $1-\cos^3 t = 1 - \left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^3 = 1 - \left(1 - 3\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = 3\frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

5. On écrit : $g(t) = \exp\left(\frac{1}{4}\ln\left(1-\cos^3 t\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\ln\left(3\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\right)$.

$$\lim_{t\to 0}\ln\left(3\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right) = -\infty \Rightarrow \lim_{t\to 0} g(t) = 0.$$

On peut prolonger par continuité f en $-\pi/2$ avec $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

6. On utilise les développements limités de la question **4.**

$$h(t) = \frac{3}{4}\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^2\left(t+o(t^2)\right)\left(3\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^{-3/4}.$$

$$h(t) = \frac{3}{4}\left(1 - 2\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\left(t + o(t^2)\right)\left(3\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^{-3/4},$$

ce qui donne : $h(t) = \dfrac{3}{4}\left(1 - t^2 + o(t^2)\right)\left(t + o(t^2)\right)\left(3\dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^{-3/4}$.

On en déduit un équivalent :

$$h(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{3}{4}t\left(3\frac{t^2}{2}\right)^{-3/4} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-3/4} \times \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = +\infty$.

En conclusion, la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

La demi-tangente à droite au point $x = -\dfrac{\pi}{2}$ au graphe de f est donc verticale.

EXERCICE 04

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, qui au polynôme P associe : $\phi(P) = \dfrac{1}{2}\left[P(X+1) + P(X-1)\right]$.

1. On a : $\phi(1) = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$, $\phi(X) = \dfrac{1}{2}(X+1+X-1) = X$. De même,

$$\phi(X^2) = \frac{1}{2}\left((X+1)^2 + (X-1)^2\right) = \frac{1}{2}\left(X^2 + 1 + X^2 + 1 + 2X - 2X\right) = X^2 + 1.$$

$$\phi(X^3) = \frac{1}{2}\left((X+1)^3 + (X-1)^3\right) = \frac{1}{2}\left(X^3 + 3X^2 + 3X + 1 + X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right) = X^3 + 3X.$$

Et enfin :

$$\phi(X^4) = \frac{1}{2}\left((X+1)^4 + (X-1)^4\right) = \frac{1}{2}\left(X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 + X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1\right),$$

ce qui donne : $\phi(X^4) = X^4 + 6X^2 + 1$.

2. Donnons, en fonction de ceux de P, le degré et le coefficient dominant de $\phi(P)$.

On se lance dans une preuve par récurrence. Mais auparavant, il faut intuiter le degré et le coefficient dominant. Dans la question précédente, le coefficient dominant de $\phi(X^k)$ est 1 (comme celui de X^k) et le degré de $\phi(X^k)$ est le même que X^k. Donc pour un polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de coefficient dominant $a_n \neq 0$ et de degré n, on va montrer que c'est aussi le cas pour $\phi(P)$.

On remarque que $a_n(X+1)^n = a_n X^n + Q_n$, où Q_n est un polynôme de degré $n-1$. De même, $a_k(X+1)^k$ est pour k entier entre 0 et $n-1$ un polynôme de degré au plus $n-1$. Donc $P(X+1)$ s'écrit $a_n X^n + V_n$ avec V_n polynôme de degré au plus $n-1$. Et de même, $P(X-1) = a_n X^n + W_n$ avec W_n polynôme de degré au plus $n-1$.

$$\phi(P) = \frac{1}{2}\left(a_n X^n + V_n + a_n X^n + W_n\right) = a_n X^n + Z_n,$$

où Z_n est un polynôme de degré au plus $n-1$. On peut conclure. $\phi(P)$ a le même coefficient dominant et le même degré que P.

3. Déterminons un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi(P_n) = X^n$ dans quatre cas : $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

• *Déterminons P_0 constant tel que $\phi(P_0) = 1$*

D'après la question **1**, on peut prendre $P_0 = 1$.

• *Déterminons P_1 de degré au plus 1 tel que $\phi(P_1) = X$*

D'après la question **1**, on peut prendre $P_1 = X$.

• *Déterminons P_2 de degré au plus 2 tel que $\phi(P_2) = X^2$*

On sait que P_2 doit être de degré 2 et de coefficient dominant 1. Ainsi P_2 est de la forme $X^2 + \alpha X + \beta$.

$$\phi(P_2) = \frac{1}{2}\left((X+1)^2 + \alpha(X+1) + \beta + (X-1)^2 + \alpha(X-1) + \beta\right).$$

On développe.

$$\phi(P_2) = X^2 + \alpha X + \beta + 1 = X^2.$$

On en déduit $\alpha = 0$ et $\beta = -1$ par identification. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients correspondants le sont aussi.
Ainsi $P_2 = X^2 - 1$.

• *Déterminons P_3 de degré au plus 3 tel que $\phi(P_3) = X^3$*

On sait que P_3 doit être de degré 3 et de coefficient dominant 1. Ainsi P_3 est de la forme $X^3+\alpha X^2+\beta X+\gamma$.

$$\phi(P_3) = \frac{1}{2}\left((X+1)^3 + \alpha(X+1)^2 + \beta(X+1) + \gamma + (X-1)^3 + \alpha(X-1)^2 + \beta(X-1) + \gamma\right).$$

On développe.

$$\phi(P_3) = X^3 + (6+2\beta)X^2 + 2\alpha X + 2\alpha + 2\gamma = X^3.$$

On en déduit $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = -3$. Ainsi $P_3 = X^3 - 3X$.

4-a On suppose admis l'existence et l'unicité de $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi(P_n) = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc tel que l'on ait

$$(1) : \frac{1}{2}\left(P_n(X+1) + P_n(X-1)\right) = X^n.$$

Dérivons l'égalité (1). On suppose $n \geqslant 1$ pour ne pas avoir deux cas à faire.

$$\frac{1}{2}\left(P_n'(X+1) + P_n'(X-1)\right) = nX^{n-1} \Rightarrow X^{n-1} = \frac{1}{2n}\left(P_n'(X+1) + P_n'(X-1)\right).$$

Or d'après l'énoncé, $X^{n-1} = \phi(P_{n-1}) = \frac{1}{2}\left(P_{n-1}(X+1) + P_{n-1}(X-1)\right)$. On peut écrire de plus :

$$\phi\left(\frac{P_n'}{n}\right) = X^{n-1} = \phi(P_{n-1}).$$

Comme P_{n-1} est le seul polynôme tel que $X^{n-1} = \phi(P_{n-1})$, on a : $P_n' = nP_{n-1}$.

4-b. Montrons par récurrence que si k est un entier supérieur ou égal à n, $P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$.

• *Initialisation*

Le résultat est vrai pour $k = 0$ car alors $P_n^{(0)} = \frac{n!}{n!}P_n = P_n$.

Le résultat est vrai pour $k = 1$ car alors $P_n' = \frac{n!}{(n-1)!}P_{n-1} = nP_{n-1}$.

• *Transmission*

On suppose le résultat vrai pour un k entier donné (strictement inférieur à n).

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k} \Rightarrow P_n^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}' = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)P_{n-k-1},$$

en utilisant **4-a** appliquée à $n-k$ à la place de n.

$$P_n^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k-1)!}P_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-(k+1))!}P_{n-(k+1)}$$

C'est bien la proposition au rang $k+1$.