Devoir libre 02

2TSI. Mathématiques

A rendre le vendredi 13 Octobre 2023 au plus tard

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A. On rappelle que $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et que par rapport à A, les lignes de A deviennent les colonnes de A^T, dans le sens croissant d'indexation.
Par ailleurs, la transposition est une application linéaire et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $Tr(A)$ sa trace. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^T = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Enfin, si A est carrée et inversible, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Partie I

On considère dans cette partie uniquement la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. En déduire que $A^2 + I$ n'est pas inversible.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Calculer PAP^{-1} et en déduire que A est semblable à la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, B^{2p} et B^{2p+1}.
   En posant $D = \text{Diag}(1, 1, 0)$, en déduire A^{2p} et A^{2p+1} en fonction de D.

Partie II

Étude de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout matrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que, $\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, $\det A = 0$.
5. Montrer que, $\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de l'application $v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

T.S.V.P $\rightarrow$

Partie III

On fixe dans cette partie un entier naturel n non nul et une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si X est une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, quelle est la forme de X^T ? Quel est le nombre de lignes et de colonnes de $X^T BX$, où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a :
$$X^T BX = X^T B^T X.$$
En déduire que $X^T AX = 0$.
3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $x_1, ..., x_n$ ses coefficients. Calculer $X^T X$.
Puis montrer que $X^T X = 0 \Rightarrow X = 0$.
4. Soit une matrice colonne X telle que $(A + I)X = 0$. En calculant $X^T(A + I)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A + I)$ est réduit au vecteur nul. En déduire que $A + I$ est inversible.
6. Montrer que $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ vérifie $B^T B = I$. On dit que B est une matrice orthogonale.
7. Calculer $(I + B)(I + A)$. En déduire que $I + B$ est inversible et trouver son inverse.

Partie IV. BONUS

On se fixe dans cette partie un entier naturel non nul n et une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Soit X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. On suppose que $AY = 0$.
Montrer que $A^2X = 0$ puis que $Y^T Y = 0$.
2. Montrer que si $\vec{y} \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ alors $\vec{y} = 0$. En déduire que :
$$\mathbb{R}^n = Imf \oplus Kerf.$$
3. En déduire que A est semblable à une matrice bloc de la forme
$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
où C est une matrice carrée d'ordre inférieur ou égal à n.
Pouvez vous justifier pourquoi C est inversible ?