

Correction Devoir libre 02

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A . On rappelle que $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et que par rapport à A , les lignes de A deviennent les colonnes de A^T , dans le sens croissant d'indexation.

Par ailleurs, la transposition est une application linéaire et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $Tr(A)$ sa trace. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^T = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Enfin, si A est carrée et inversible, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Partie I

On considère dans cette partie uniquement la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1-a On a rapidement : $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et clairement $Rg(A^2 + I_3) = 1$

et $A^2 + I$ n'est pas inversible.

En Plus : étude diagonalisation de A . On calcule le polynôme caractéristique de A , $\chi_A(t) =$

$$\begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix} = t(t^2 + 1) = t(t - i)(t + i).$$

Ainsi, les valeurs propres complexes de A sont 0 , i et $-i$.

La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car elle possède des valeurs propres non réelles et comme les trois valeurs propres complexes sont distinctes dans $\mathbb{C}$, la matrice A est bien diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On montre que P est inversible en calculant P^{-1} . Il faut user du Gauß-Jordan. On concatène P et I_3 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a permuté L_2 et L_3 . Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on reconnaît P .

3. Calculons PAP^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Donc A est semblable à la matrice B .

4. On commence, $B^2 = \text{diag}(-1, -1, 0)$. Et donc par récurrence immédiate,

$$B^{2p} = (-1)^p \text{diag}(1, 1, 0).$$

Puis, $B^0 = I_3$, et pour tout p entier,

$$B^{2p+1} = B^{2p}B = (-1)^p \text{diag}(1, 1, 0)B = (-1)^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^p B.$$

En posant $D = \text{Diag}(1, 1, 0)$, on a : $B^{2p} = (-1)^p D$ et $B^{2p+1} = (-1)^p B$.

Alors :

$$A = P^{-1}BP \Rightarrow A^2 = P^{-1}BPP^{-1}BP = P^{-1}B^2P.$$

Supposons $A^n = P^{-1}B^nP$, alors $A^{n+1} = A^nA = (P^{-1}B^nP)P^{-1}BP = P^{-1}B^{n+1}P$. On a la transmission. Alors pour tout p entier,

$$A^{2p} = P^{-1}B^{2p}P = P(-1)^pDP = (-1)^p\text{Diag}(1, 0, 1).$$

(On a laissé les calculs au lecteur.)

De même,

$$A^{2p+1} = P^{-1}B^{2p+1}P = P(-1)^pBP = (-1)^pA.$$

Partie II

Étude de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. C'est du cours. Mais on va le refaire car c'est vous ! Déjà la matrice nulle est opposée à sa transposée. Puis si A et B sont dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$(A + aB)^T = -A - aB = -(A + aB) \Rightarrow A + aB \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

2. On sait que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = (a_{i,j})$ vérifie : $a_{i,i} = -a_{i,i}$ pour tout i entier et donc $a_{i,i} = 0$. On pose ensuite $\alpha = a_{3,2}$, $\beta = a_{1,3}$ et $\gamma = a_{2,1}$. Par antisymétrie, $a_{2,3} = -\alpha$, $a_{3,1} = -\beta$ et $a_{1,2} = -\gamma$.

On a bien $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

3. On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ rue et de la $j^{\text{ème}}$ avenue (pour faire Newyorkais) qui vaut 1. Alors :

$$A = \alpha(E_{3,2} - E_{2,3}) + \beta(E_{1,3} - E_{3,1}) + \gamma(E_{2,1} - E_{1,2}).$$

La famille $\{E_{3,2} - E_{2,3}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,1} - E_{1,2}\}$ est génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Puis

$$\alpha(E_{3,2} - E_{2,3}) + \beta(E_{1,3} - E_{3,1}) + \gamma(E_{2,1} - E_{1,2}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

La famille est libre, c'est donc une base et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = 3$.

4. $\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$,

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T) = \text{Det}(-A) = -\text{Det} A \Rightarrow \text{Det} A = 0.$$

5. Montrons que, $\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de l'application $v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

En effet, il suffit de prendre $\vec{w}(\alpha, \beta, \beta)$. On a rapidement :

$$\phi(\vec{e}_1) = \vec{w} \wedge \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta \end{pmatrix}, \phi(\vec{e}_2) = \vec{w} \wedge \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix} \text{ et } \phi(\vec{e}_3) = \vec{w} \wedge \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve les colonnes de la matrice A .

Partie III

On fixe dans cette partie un entier naturel n non nul et une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit X une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, quelle est la forme de X^T ?

Clairement, $X^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne.

Quel est le nombre de lignes et de colonnes de $X^T B X$, où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

La matrice $X^T B X$ est le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ par une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on obtient une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc c'est une constante.

2. Pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice carrée B d'ordre n , $X^T B X$ est une constante donc symétrique.

On a :

$$(X^T B X)^T = X^T B^T X.$$

Si $B = A$ avec A antisymétrique, $A^T = -A$ et

$$(X^T A X)^T = X^T A^T X = -X^T A X.$$

Alors le seul coeff de $X^T A X$ est égal à son opposé et vaut donc 0.

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $x_1, \dots, x_n$ ses coefficients.

$$X^T X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$$X^T X = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0 \Rightarrow X = 0.$$

4. Soit une matrice colonne X telle que $(A + I)X = 0$.

$$\text{1er Méthode : } X^T(A + I)X = X^T((A + I)X) = X^T 0 = 0.$$

$$\text{2eme Méthode : } X^T(A + I)X = X^T A X + X^T X = 0 + X^T X.$$

Donc $X^T X = 0 \Rightarrow X = 0$.

5. Si $X \in \text{Ker}(A + I)$, $(A + I)X = 0$. Et donc $X = 0$ d'après la question précédente. Ainsi, $A + I$ est associé à un endomorphisme injectif et comme l'on est en dimension finie, $A + I_3$ est inversible.

6. Montrons que $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ vérifie $B^T B = I$.

On écrit :

$$\begin{aligned} B^T B &= [(I - A)(I + A)^{-1}]^T [(I - A)(I + A)^{-1}] = [(I + A)^{-1}]^T (I - A)^T (I - A)(I + A)^{-1} \\ &= [(I + A)^T]^{-1} (I - A^T)(I - A)(I + A)^{-1} = (I - A)^{-1} (I + A)(I - A)(I + A)^{-1} \\ &= (I - A)^{-1} (I - A)(I + A)(I + A)^{-1} = I_n I_n = I_n \end{aligned}$$

On a usé de $A^T = -A$ et de $(I - A)(I + A) = (I + A)(I - A)$.

7. On a :

$$(I + B)(I + A) = I + A + B(I + A) = I + A + (I - A)(I + A)^{-1}(I + A) = I + A + I - A = 2I.$$

Partie IV

On se fixe dans cette partie un entier naturel non nul n et une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

1. Soit X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. On suppose que $AY = 0$.

$$AY = A(AX) = A^2 X = 0.$$

Puis :

$$Y^T Y = (AX)^T (AX) = X^T A^T A X = X^T (-A) A X = -X^T A^2 X = -X^T 0 = 0.$$

2. $\vec{y} \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ alors il existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$ et $f(\vec{y}) = \vec{0}$.

Si Y (respectivement X) est la matrice de $\vec{y}$ (respectivement $\vec{x}$) dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $Y = AX$ et $AY = 0$. Donc $Y^T Y = 0$ et donc $Y = 0$ d'après III-3. Et donc $\vec{y} = \vec{0}$.

Et donc $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = 0$ et comme $\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$, on a bien :

$$\mathbb{R}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.$$

3. Soit $r = \dim \text{Im } f$ et $\gamma = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_r)$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$. Alors $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_r)$ est une base de $\text{Im } f$ et $(\vec{e}'_{r+1}, \dots, \vec{e}'_n)$ est une base de $\text{Ker } f$. Dans cette base, la matrice représentative de f est de la forme bloc

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où C est une matrice carrée d'ordre inférieur ou égal à n . On peut même dire que le rang de C est r . Comme $\text{Rg } C = r$ est aussi $\text{RG } f$, C est inversible.