2TSI. DEVOIR SURVEILLE N°02

CORRECTION

Exercice 01

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1-a Montrons que P est inversible et déterminons son inverse.
On applique Gauβ-Jordan. On concatène P et I_2 puis on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Puis, $L_2 \leftarrow L_2/(-2)$ et ensuite $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donne :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

On déconcatène et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}P$.

1-b $A^2 - 2A = O_2$.

1-c On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U \text{ et } AV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.V.$$

Déduisons que si ϕ est l'endomorphisme associé canoniquement à A, et si l'on pose la base

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1),\ \vec{u}_2 = (1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$, alors la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est C.
En effet, $\phi(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1$ et la première colonne de la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est $2U$. Puis, comme $\phi(\vec{u}_2) = \vec{0}$ et la seconde colonne de la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est la colonne nulle, c'est bien C.
Comme P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a bien l'égalité $P^{-1}AP = C$.

2-a Exprimons B en fonction de I_2 et de A.
On a immédiatement : $B = A + I_2$.
Exprimons de même D en fonction de I_2 et de C.
On a immédiatement : $D = C + I_2$.

2-b Déduisons que $P^{-1}BP = D$.
En effet, $P^{-1}BP = P^{-1}(A + I_2)P = P^{-1}AP + P^{-1}I_2P = C + I_2 = D$.

3-a Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.

- Initialisation : vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Hérédité : On suppose vrai au rang n. On a :

$$D^{n+1} = D^nD = P^{-1}B^nPD = P^{-1}B^nPP^{-1}BP = P^{-1}B^nBP = P^{-1}B^{n+1}P.$$

q.e.d.

3-b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3-c On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}.$$

4-a Ben et Nuts jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$. On suppose que c'est Ben qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Ben gagne le $n^{\text{ème}}$ échange » et B_n l'événement « Nuts gagne le $n^{\text{ème}}$ échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.
Il est clair que $a_1 = P(A_1) = \frac{2}{3}$.
Puis on utilise :

$$A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right) \Rightarrow P(A_2) = P_{A_1}(A_2)\, P(A_1) + P_{\overline{A_1}}(A_2)\, P\left(\overline{A_1}\right).$$

Puis $P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3}$ est la probabilité que Ben gagne le second échange sachant qu'il a le service car il a gagné le premier échange.
Puis $P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{1}{3}$ est la probabilité que Ben gagne le second échange sachant qu'il n'a pas le service car il a perdu le premier échange. Il reste :

$$P(A_2) = \frac{2}{3}P(A_1) + \frac{1}{3}P\left(\overline{A_1}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

4-b On observe que Ben emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?
Il s'agit de calculer $P_{A_2}(A_1)$. On use de la formule :

$$P_{A_2}(A_1) = \frac{P_{A_1}(A_2)\, P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{2}{5}.$$

4-c On utilise la formule des probabilités totales et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup \left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right) \Rightarrow P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})\, P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\, P\left(\overline{A_n}\right).$$

Puis $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}$ est la probabilité que Ben gagne léchange numéro $n+1$ sachant qu'il a le service car il a gagné l'échange numéro n.
Puis $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$ est la probabilité que Ben gagne l'échange numéro $n+1$ sachant qu'il n'a pas le service car il a perdu l'échange numéro n. Il reste :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P\left(\overline{A_n}\right) = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n.$$

Exprimons de même b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n pour $n \geqslant 1$.
On utilise (encore) la formule des probabilités totales et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$B_{n+1} = (B_{n+1} \cap B_n) \cup \left(B_{n+1} \cap \overline{B_n}\right) \Rightarrow P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})\, P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})\, P\left(\overline{B_n}\right).$$

Puis $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$ est la probabilité que Nuts gagne léchange numéro $n+1$ sachant qu'il a le service car il a gagné l'échange numéro n.
Puis $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}$ est la probabilité que Nuts gagne l'échange numéro $n+1$ sachant qu'il n'a pas le service car il a perdu l'échange numéro n. Il reste :

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = \frac{2}{3}P(B_n) + \frac{1}{3}P\left(\overline{B_n}\right) = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}a_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n.$$

4-d Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On a immédiatement :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}BX_n.$$

4-e Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.
Initialisation : c'est vrai pour $n = 1$ car $X_1 = I_2 X_1$.

Hérédité : Supposons la formule vraie au rang n. Alors :

$$X_{n+1} = \frac{1}{3} \times B \times \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1 = \frac{1}{3^n} B^n X_1.$$

4-f Déduisons de la question **3-c** que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{3^n+1}{2 \times 3^n}$ et déterminons de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.
On peut écrire que :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1} \times 2} \begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^n \times 2} \begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n \times 2} \begin{pmatrix} 3^n+1 \\ 3^n-1 \end{pmatrix}.$$

On aboutit à :

$$a_n = \frac{3^n+1}{2 \times 3^n} \text{ et } b_n = \frac{3^n-1}{2 \times 3^n}.$$

5-a Calculons V_2 et W_2.
On a : $V_1 = \dfrac{2}{3} V_0 + \dfrac{1}{3} W_0$ et $W_1 = \dfrac{1}{3} V_0 + \dfrac{2}{3} W_0$. Alors :

$$V_2 = \frac{2}{3} V_1 + \frac{1}{3} W_1 \text{ et } W_2 = \frac{1}{3} V_1 + \frac{2}{3} W_1.$$

Soit :

$$V_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} V_0 + \frac{1}{3} W_0\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} V_0 + \frac{2}{3} W_0\right).$$

Ou encore :

$$V_2 = \left(\frac{2^2}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) V_0 + \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^2}\right) W_0.$$

La proportion de vodka est donc dans le premier verre rempli :

$$v_2 = \frac{\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2}{3^2}}{\dfrac{2^2}{3^2} + \dfrac{1}{3^2}\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2}{3^2}} = \frac{4}{9}.$$

De même,

$$W_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} V_0 + \frac{1}{3} W_0\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} V_0 + \frac{2}{3} W_0\right).$$

Ou encore :

$$W_2 = \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^2}\right) V_0 + \left(\frac{2^2}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) W_0.$$

La proportion de vodka est donc dans le deuxième verre rempli :

$$w_2 = \frac{\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{2^2}{3^2}}{\dfrac{2^2}{3^2} + \dfrac{1}{3^2}\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2}{3^2}} = \frac{5}{9}.$$

5-b Comme $\begin{cases} V_n &= \dfrac{2}{3} V_{n-1} + \dfrac{1}{3} W_{n-1} \\ W_n &= \dfrac{1}{3} V_{n-1} + \dfrac{2}{3} W_{n-1} \end{cases}$, la relation entre la matrice colonne $\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix}$, la matrice B et la matrice colonne $\begin{pmatrix} V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$ est pour $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} B \begin{pmatrix} V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$.

5-c En utilisant les résultats des questions 3 et 4, déterminons la proportion de vodka dans le premier verre plein. On a :

$$V_n = \frac{1+3^n}{3^n \times 2} V_0 + \frac{3^n - 1}{3^n \times 2} W_0.$$

La proportion est :

$$\frac{\dfrac{3^n - 1}{3^n \times 2}}{\dfrac{1+3^n}{3^n \times 2} \dfrac{3^n - 1}{3^n \times 2}} = \frac{3^n - 1}{3^n \times 2}.$$

De même, la proportion de vodka dans le second verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération, pour tout entier $n \geqslant 1$ est :

$$\frac{\dfrac{3^n + 1}{3^n \times 2}}{\dfrac{1+3^n}{3^n \times 2} \dfrac{3^n - 1}{3^n \times 2}} = \frac{3^n + 1}{3^n \times 2}.$$

Quand on fait tendre n vers $+\infty$, on constate que ces deux proportions tendent vers 1/2.

Exercice 02

1) On considère l'application : $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'$.
Pour montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_3[X]$ un endomorphisme, il faut montrer la linéarité de ϕ et montrer que l'image de $\mathbb{R}_3[X]$ est incluse dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Linéarité de ϕ

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - (P + \lambda Q)' = P + \lambda Q - P' - \lambda Q' = P - P' + \lambda (Q - Q').$$

On retrouve $\phi(P) + \lambda\phi(Q)$.

La restriction de ϕ àÂ $\mathbb{R}_3[X]$ est elle un endomorphisme ?

Si le degré de P est inférieur ou égal à 3, celui de $P - P'$ aussi. Et donc si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Par ailleurs, comme $\mathbb{R}_3[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la base $(1, X, X^2, X^3)$, une autre méthode pour démontrer que ϕ_3 est un endomorphisme, c'est de vérifier que pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$, $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\phi(1) = 1,\ \phi(X) = X - 1.$$

Puis :

$$\forall k \in [\![2, 3]\!],\ \phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}.$$

Le polynôme $X^k - kX^{k-1}$ est de degré k pour tout k compris entre 1 et n. Donc $\phi(X^k)$ est un polynôme de degré au plus 3 pour tout entier k compris entre 0 et 3.

On peut conclure : ϕ induit sur $\mathbb{R}_3[X]$ un endomorphisme, noté ϕ_3.

2) On veut expliciter la matrice de ϕ_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est-à-dire dans la base notée $\beta = (1, X, X^2, X^3)$. On utilise la question précédente. On sait que $\phi(1) = 1$ et que pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, $\phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. On en déduit chaque colonne de la matrice $M_\beta(\phi_3)$, matrice représentative de ϕ dans la base canonique β de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$M_\beta(\phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) On veut démontrer que ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Donnons plein de méthodes.

Méthode 01

Le calcul de M^{-1} permet de montrer que ϕ_3 est bijectif. Faisons le, étant donné que de toute façon, c'est demandé. On commence par concaténer M et I_4.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Puis on fait successivement :

$$L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_4,\ L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_3,\ L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Et on peut conclure.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 02

Si vous connaissez les déterminants d'ordre n, on peut remarquer que le déterminant de $M_\beta(\phi_3)$ est triangulaire supérieure et est donc égal au produit des ses éléments diagonaux qui sont tous des 1.
Ainsi, $\mathsf{Det}\, M_\beta(\phi_3) = 1 \neq 0$ et ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Méthode 03

On peut prouver que le noyau de ϕ_3 est nul. En effet, si tel est le cas, comme ϕ_3 est un endomorphisme en dimension finie, ϕ_3 qui est alors injectif est bijectif (par le théorème du rang).
Soit donc $P \in \operatorname{Ker} \phi_3$, on a : $P = P'$. Or si P est de degré $k \geqslant 1$, P' est de degré $k-1$. Donc si $P \in \operatorname{Ker} \phi_3$, P est constant et comme P' est alors nul, $\operatorname{Ker} \phi_3$ est réduit au polynôme nul.

Méthode 04

On peut montrer que $M_\beta(\phi_3)$ est de rang 4, ce qui permet alors de dire que ϕ_3 est surjectif donc bijectif (endomorphisme en dimension finie). Si l'on fait les opérations élémentaires simultanées :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2,\ ...,\ C_4 \leftarrow C_4 + 3C_3,$$

la matrice $M_\beta(\phi_3)$ se transforme en I_4, qui est bien de rang 4.

Méthode 05

On peut expliciter l'inverse de ϕ_3, ce qui prouvera son existence et par la même occasion que ϕ_3 est bijectif.
Soit $Q = P - P' = \phi_n(P)$. En dérivant, $Q' = P' - P''$, puis de manière générale,

$$\forall k \in [\![1, 2]\!],\ Q^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)}.$$

Et enfin $Q^{(3)} = P^{(3)}$ car P est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$, donc de degré au plus 3. En sommant toutes ces égalités, on aboutit àÂ :

$$\sum_{k=0}^{3} Q^{(k)} = P - P' + ... + P^{(2)} - P^{(2)} + P^{(2)} = P.$$

Tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ possède donc un antécédent unique qui est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} Q^{(k)}$.

Ainsi, ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

4) La famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{i\in[\![0,3]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car cette famille est formée de 4 polynômes (non nuls) tous de degrés différents dans un espace vectoriel de dimension 4.

5) Comme ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, pour tout $i \in [\![0,3]\!]$, le polynôme $\dfrac{X^i}{i!}$, élément de $\mathbb{R}_3[X]$, possède donc un antécédent unique par ϕ_3 que l'on peut appeler s_i. Et $s_i \in \mathbb{R}_3[X]$.
Finalement, il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_3$ telle que :

$$\forall i \in [\![0,3]\!],\ \phi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}.$$

Par ailleurs, ϕ_3^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. On peut conclure que l'image de la base $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{i\in[\![0,3]\!]}$ par l'automorphisme ϕ_3^{-1} (qui est la famille $(s_i)_{i\in[\![0,3]\!]}$) est encore une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On peut conclure :

$$(s_0, s_1, ..., s_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].$$

6) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_3[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.
Or $\delta^4 = 0$ car la dérivée quatrième d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ est nulle.
La quantité :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^3)$$

vaut, en la développant :

$$Id + \delta + ... + \delta^3 - \delta - ... - \delta^3 - \delta^4.$$

Donc :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + \delta^2 + \delta^3) = Id.$$

Donc $\phi_3^{-1} = Id + \delta + \delta^2 + \delta^3$.
On calcule les matrices M_1, M_2 et M_3 respectivement de δ, de δ^2 et de δ^3 dans $\mathcal{B}$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et on a bien $M^{-1} = I_4 + M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) On remarque que $\phi_3 = Id - \delta$ et donc $\phi_3^{-1} = Id + \delta + ... + \delta^3$. On retrouve l'expression trouvée à la quatrième méthode du développement de la question **3)**.

$$\forall i \in [\![0,3]\!],\ \phi_3^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \left(Id + \delta + ... + \delta^3\right)\left(\frac{X^i}{i!}\right).$$

Alors, pour i fixé dans $[\![0,3]\!]$,

$$\phi_3^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + i\frac{X^{i-1}}{i!} + ... + i(i-1)...(i-(i-1))\frac{X^{i-i}}{i!}.$$

C'est-à-dire :

$$\phi_3^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + \frac{X^{i-1}}{(i-1)!} + ... + \frac{X^0}{0!}.$$

On peut conclure :

$$\forall i \in [\![0,3]\!],\ \phi_3^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}.$$