2TSI. DEVOIR SURVEILLE N°02

Vendredi 10 Novembre 2023

Les deux exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. La durée est de 4heures et les calculettes sont interdites.

Exercice 01

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Déterminer $A^2 - 2A$.
   (c) On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer AU et AV.
   En déduire que si ϕ est l'endomorphisme associé canoniquement à A, et si l'on pose la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1),\ \vec{u}_2 = (1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, alors la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est C.
   Justifier alors l'égalité $P^{-1}AP = C$.
2. (a) Exprimer B en fonction de I_2 et de A. Exprimer de même D en fonction de I_2 et de C.
   (b) En déduire que $P^{-1}BP = D$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner les coefficients de D^n.
   (c) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$.
4. Ben et Nuts jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$. On suppose que c'est Ben qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.
   Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Ben gagne le $n^{\text{ème}}$ échange » et B_n l'événement « Nuts gagne le $n^{\text{ème}}$ échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.
   (a) Donner les valeurs de a_1 et de b_1. Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \dfrac{5}{9}$.
   (b) On observe que Ben emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?
   (c) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n.$$
   Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n pour $n \geqslant 1$.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier : $X_{n+1} = \dfrac{1}{3}BX_n$.
   (e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $X_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.
   (f) Déduire de la question **3-c** que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{3^n+1}{2 \times 3^n}$.
   Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.

T.S.V.P $\rightarrow$

5. Nuts perd la partie et pour oublier, il decide de se souler. Il dispose en face de lui quatre verres de **volumes identiques** de la gauche vers la droite. Il remplit le premier verre à partir de la gauche de limonade et le deuxième verre de vodka pure. Dans le troisième verre, Nuts verse deux tiers du contenu du premier verre et un tiers du contenu du deuxième verre. Il mélange bien le tout. Dans le quatrième verre, Nuts verse tout ce qui reste dans les deux premiers verres et mélange bien le tout. Nuts fait passer les deux premiers verres qui sont alors vides à droite des deux autres verres. Il répète ensuite l'expérience n fois.
   On note V_n le volume de vodka dans le premier verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération et W_n le volume de vodka dans le deuxième verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération.
   On s'intéresse à la proportion de vodka dans chacun de ces verres pleins. On notera v_n la proportion de vodka dans le premier verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération et w_n celle dans le deuxième verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération.
   On posera $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$. On a bien entendu alors $v_1 = \dfrac{1}{3}$ et $w_1 = \dfrac{2}{3}$.
   (a) Calculer v_2 et w_2.
   (b) Trouver une relation entre $\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix}$, la matrice B et $\begin{pmatrix} V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$.
   (c) En utilisant les résultats des questions 3 et 4, déterminer la proportion v_n de vodka dans le premier verre plein et la proportion w_n de vodka dans le second verre plein à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération, pour tout entier $n \geqslant 1$. Faire tendre n vers $+\infty$. Que constate t-on ?

Exercice 02

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé. Ici, on note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à 3. On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

On rappelle que $\phi^2 = \phi \, o \, \phi$ et que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\phi^n = \phi^{n-1} \, o \, \phi$.

1. Montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_3[X]$ un endomorphisme, c'est-à-dire que ϕ est linéaire et que l'image par ϕ d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   On note dans la suite ϕ_3 cet endomorphisme.
2. Calculer $\phi_3(1)$, $\phi_3(X)$, $\phi_3(X^2)$ et $\phi_3(X^3)$.
   En déduire la matrice M de ϕ_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Inverser la matrice M et en déduire que ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Justifier le fait que la famille $\left(1,\, X,\, \dfrac{X^2}{2!},\, \dfrac{X^3}{3!}\right)$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes s_0, s_1, s_2, s_3 telle que pour tout i appartenant à $[\![0, 3]\!]$, on a : $\phi_3(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$.
   Pourquoi peut-on affirmer que (s_0, s_1, s_2, s_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_3[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, c'est-à-dire que $\delta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$.
   Que vaut δ^4 ? Comparer ϕ_3 et $Id - \delta$ puis justifier :
   $$(Id - \delta) \, o \, (Id + \delta + \delta^2 + \delta^3) = Id.$$
   En déduire l'expression de ϕ_3^{-1}.
   Exprimer alors la matrice de $Id + \delta + \delta^2 + \delta^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Que remarque t-on ?
7. ***Pour départager les ex-aequo***
   En déduire l'expression de s_i en fonction de X pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$.