**CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES**

Colle 09

Du 20 Novembre 2023 au 25 Novembre 2023

1) **Déterminants d'ordre $n \geq 2$** : rappels du calcul, règle de Pierre Sarrus pour le cas 3. Application à l'aire algébrique (cas $n = 2$) et au volume algébrique (cas $n = 3$). Définition en tant qu'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, multilinéaire et antisymétrique telle que $\text{Det}(I_n) = 1$. Formule de développement selon une rangée. Opérations élémentaires sur un déterminant et conséquences sur ce déterminant. Caractérisation d'une matrice inversible par son déterminant. Déterminant de deux matrices semblables.

$$\text{Det}(AB) = \text{Det} A \times \text{Det} B, \text{Det}(A^T) = \text{Det} A, \text{Det}(\lambda A) = \lambda^n \text{Det} A.$$

Déterminant d'une matrice triangulaire.

► **Déterminants de n vecteurs** dans une base de E , espace vectoriel de dimension n .

► **Déterminant d'un endomorphisme.**

2) **Réduction des endomorphismes**

► Notion de valeur propre et de vecteur propre. Les sous-espaces propres sont en somme directe.

► Notion de polynôme caractéristique. On note $\chi_u(X) = \text{Det}(X \text{id} - u)$, si $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. χ_u est de degré n et son coefficient dominant est 1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

► u est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si $\sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \dim E_\lambda = \dim E$.

Warnung : Pas encore de trigonalisation.

Le colleur vérifiera la maîtrise ou l'acquisition de certains des points suivants (en question de cours ou dans un exercice) :

Compétences à acquérir :

Sur les déterminants :

- 1) Savoir appliquer la règle de Pierre Sarrus pour $n = 3$.
- 2) Faire le lien avec le produit vectoriel pour le cas $n = 3$.
- 3) Savoir faire des opérations élémentaires sur un déterminant pour simplifier son calcul final (par exemple, le rendre triangulaire)
- 4) Savoir développer un déterminant selon une rangée.
- 5) Connaître le lien entre l'inversibilité d'une matrice et la non nullité de son déterminant.
- 6) Pour les meilleurs : arriver à trouver une relation de récurrence entre un déterminant d'ordre n et un déterminant d'ordre $n - 1$ pour permettre par récurrence descendante de calculer le déterminant initial.

Sur la réduction des endomorphismes :

- 1) Savoir calculer χ_u en mettant des termes du type $X - a$ en facteur dans le déterminant.
- 2) Montrer qu'une matrice est diagonalisable ou non par le calcul des sous-espaces propres.
- 3) Méthode pour calculer A^n par la formule $A^n = PD^nP^{-1}$ dans le cas où A est diagonalisable et donc dans le cas où D est diagonale.