

# Devoir libre 03. KORREKTUR

## EXERCICE 01

On utilisera Python pour établir les fonctions

On considère la fonction *mystere* suivante :

```
>>> def mystere(n, b) : """ Données : n > 0 un entier et b > 0 un entier """
    t = []
    while n > 0 :
        c = n % b; t.append(c); n = n // b
    return t
```

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $c_k$ ,  $t_k$  et  $n_k$  les valeurs prises par les variables  $c$ ,  $t$  et  $n$  à la sortie de la  $k^{\text{ème}}$  itération de la boucle *while*.

**1.** Lorsqu'on exécute *mystere*(256, 10), pour  $k = 1$ ,  $c_1 = 6$ ,  $t_1 = [6]$  et  $n_1 = 25$  puis pour  $k = 2$ ,  $c_2 = 5$ ,  $t_2 = [6, 5]$  et  $n_2 = 2$ . Enfin pour  $k = 3$ ,  $c_3 = 2$ ,  $t_3 = [6, 5, 2]$  et  $n_3 = 0$ . Donc on renvoie  $[6, 5, 2]$ .

**2-a.** Soit  $n > 0$  un entier. On exécute *mystere*( $n$ , 10). On pose  $n_0 = n$ .

Si l'algorithme boucle indéfiniment alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :  $n_k > 0$ .

De plus :  $n_{k+1} \leq \frac{n_k}{10} < n_k$ . La suite  $(n_k)$  serait une suite d'entiers naturels strictement décroissante. C'est impossible.

**2-b.** On note  $p$  le nombre d'itérations lors de l'exécution de *mystere*( $n$ , 10). Alors  $n_{p-1} \geq 1$ . À chaque itération, la valeur de la variable  $n$  est au moins divisée par 10, donc, par récurrence immédiate,  $n_{p-1} \leq \frac{n_0}{10^{p-1}} = \frac{n}{10^{p-1}}$ . On a :

$$\frac{n}{10^{p-1}} \geq 1 \Rightarrow 10^{p-1} \leq n \Rightarrow p-1 \leq \log n \Rightarrow p \leq \log n + 1.$$

( $\log$  est le logarithme décimal.) Le nombre d'itérations est majoré par  $\lceil \log n \rceil + 1$ .

**3.** On tape (On peut reprendre la question en utilisant *mystere* comme sous-procédure, c'est-à-dire, en appelant *mystere*( $n$ , 10) dans le corps de la procédure *somme\_chiffres*( $n$ )) :

```
>>> def somme_chiffre(n) :
    s = 0
    while n > 0 :
        c = n % 10; s = s + c; n = n // 10
    return s
```

**4.** Écrivons une version récursive de *somme\_chiffres* : *somme\_rec*.

```
>>> def somme_rec(n) :
    if n <= 9 :
        return n
    else :
        return(somme_rec(n//10) + n%10)
```

## EXERCICE 02

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles pour lesquelles on suppose que la loi du couple  $(X, Y)$  est donné par le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3
1	$2\beta$	$3\beta$	$3\beta$
2	$3\beta$	$2\beta$	$3\beta$
3	$3\beta$	$3\beta$	$2\beta$

**1.** Donnons la valeur du réel  $\beta$  pour que ce tableau représente effectivement la loi du couple  $(X, Y)$ .

La somme de toutes les probabilités doit faire 1 et donc :

$$3(2\beta + 3\beta + 3\beta) = 1 \Rightarrow 24\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{24}.$$

**2.** Déterminons les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .

Le mieux est de reprendre le tableau avec la bonne valeur de  $\beta$  et de sommer les lignes et les colonnes pour avoir les lois marginales.

$X \backslash Y$	1	2	3	loi de $X$
1	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{3}$
loi de $Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Déduisons en les espérances  $E(X)$  et  $E(Y)$ . On a :

$$E(X) = E(Y) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 2.$$

**3-a.** Calculons  $E(XY)$  puis la covariance  $\text{Cov}(X, Y)$  de  $X$  et de  $Y$ .

On a :

$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{2}{24} + 1 \times 2 \times \frac{3}{24} + 1 \times 3 \times \frac{3}{24} + 2 \times 1 \times \frac{3}{24} + 2 \times 2 \times \frac{2}{24} + 2 \times 3 \times \frac{3}{24} + 3 \times 1 \times \frac{3}{24} + 3 \times 2 \times \frac{3}{24} + 3 \times 3 \times \frac{2}{24}.$$

Cela donne  $E(XY) = \frac{94}{24} = \frac{47}{12}$ . Finalement :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{47}{12} - \frac{48}{12} = -\frac{1}{12}.$$

**3-b** Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes car  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ . C'est la contraposée de l'implication vue en cours :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

## PROBLEME

### Partie I. Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

**1.** Reconnaissons la loi de  $X$ .

On a déjà  $X(\Omega)$  est l'ensemble des entiers compris entre 0 et 5.

• ( $X = 0$ ) signifie que les cinq jetons sont dans l'urne  $b$ . Le nombre de cas possibles est le nombre d'applications d'un ensemble de 5 éléments dans un ensemble de 2 éléments soit  $2^5$ .

Il y a un seul cas favorable et donc  $P(X = 0) = \frac{1}{2^5}$ .

• ( $X = 1$ ) signifie qu'un jeton est dans l'urne  $a$  et les autres dans l'urne  $b$ .

Il y a now 5 cas favorables (choix du jeton dans l'urne  $a$ ). Donc  $P(X = 1) = \frac{5}{2^5}$ .

- $(X = 2)$  signifie que deux jetons sont dans l'urne  $a$  et les autres dans l'urne  $b$ .

Il y a now  $\binom{5}{2}$  cas favorables (choix des deux jetons dans l'urne  $a$ ). Donc  $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{2^5}$ .

- $(X = 3)$  signifie que trois jetons sont dans l'urne  $a$  et les autres dans l'urne  $b$ .

Il y a now  $\binom{5}{3}$  cas favorables (choix des trois jetons dans l'urne  $a$ ). Donc  $P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \frac{10}{2^5}$ .

- $(X = 4)$  signifie que quatre jetons sont dans l'urne  $a$  et le dernier dans l'urne  $b$ .

Il y a now  $\binom{5}{4}$  cas favorables (choix des deux jetons dans l'urne  $a$ ). Donc  $P(X = 4) = \frac{\binom{5}{4}}{2^5} = \frac{5}{2^5}$ .

- $(X = 5)$  signifie que tous les jetons sont dans l'urne  $a$ .

Il y a now 1 cas favorables. Donc  $P(X = 5) = \frac{1}{2^5}$ .

On vérifie bien que  $\sum_{k=0}^5 P(X = k) = 1$ .

2. Exprimons, à l'aide de  $X$ , l'événement  $V_a$  : « L'urne  $a$  est vide ».

L'urne  $a$  est vide si tous les jetons sont dans l'urne  $b$  et donc :  $P(V_a) = P(X = 0)$ .

Faisons de même avec l'événement  $V_b$  : « L'urne  $b$  est vide ».

L'urne  $b$  est vide si tous les jetons sont dans l'urne  $a$  et donc :  $P(V_b) = P(X = 5)$ .

3. On en déduit la probabilité de l'événement  $C$  : « L'une des deux urnes est vide ».

On a  $C = V_a \cup V_b$  et comme les événements  $V_a$  et  $V_b$  sont incompatibles,

$$P(C) = P(V_a) + P(V_b) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

## Partie II. Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Soit  $E_i$  l'événement « le jeton  $i$  n'est pas dans l'urne  $a$  ». Donnons pour commencer la probabilité de l'événement contraire  $\overline{E_i}$

Cet événement contraire  $\overline{E_i}$  signifie que le jeton  $i$  est dans l'urne  $a$ . Calculons cette probabilité comme le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Le nombre de cas possibles est le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal 5 dans un ensemble de cardinal 3, soit  $3^5$ . Le nombre de cas favorables est le nombre d'applications d'un ensemble de 4 éléments (les quatre jetons qui ne sont pas le jeton  $i$ ) vers un ensemble de 3 éléments (les urnes). C'est  $3^4$  cas. Donc :

$$P(\overline{E_i}) = \frac{3^4}{3^5} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E_i) = \frac{2}{3}.$$

2. Soit  $V_a$  l'événement : « l'urne  $a$  est vide ». Comme  $E_i$  est pour tout entier  $i$ , « le jeton  $i$  n'est pas dans l'urne  $a$  », dire que l'urne  $a$  est vide c'est dire qu'aucun jeton n'est dans  $a$ . Alors :

$$V_a = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5.$$

3. Montrons que  $P(V_a) = \frac{2^5}{3^5}$ .

Comme les jetons sont indépendants les uns des autres, les événements  $E_1, E_2, E_3, E_4$  et  $E_5$  sont mutuellement indépendants et :

$$P(V_a) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) = P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3) \times P(E_4) \times P(E_5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}.$$

En notant  $V_b$  l'événement : « l'urne  $b$  est vide » et  $V_c$  l'événement : « l'urne  $c$  est vide », par symétrie du problème, on pourra admettre que  $P(V_b)$  et  $P(V_c)$  ont aussi cette même valeur. Et donc :

$$P(V_a) = P(V_b) = P(V_c) = \frac{2^5}{3^5}.$$

### Partie III. Calcul de $P(N = 2)$ et $P(N = 3)$ .

1. Que signifie en français l'événement  $(N = 3)$  ?

C'est simplement l'**événement impossible**. En effet, les jetons vont bien quelque part. Et  $P(N = 3) = 0$ .

2. Que signifie en français l'événement  $\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c$  ?

Cela signifie que l'urne  $a$  n'est pas vide mais que l'urne  $b$  et l'urne  $c$  sont vides, et donc cela signifie que tous les jetons sont dans l'urne  $a$ . Et :  $P(\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c) = \frac{1}{3^5}$ .

3. On veut calculer la probabilité de l'événement  $(N = 2)$ . On exprime dans un premier temps l'événement  $(N = 2)$  en fonction d'événements tels que  $\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c$  et d'autres du même genre.

$N = 2$  signifie que deux urnes sont vides et donc la troisième contient tous les jetons. Sauf que cette troisième urne a le droit d'être n'importe laquelle des trois urnes. Ainsi :

$$(N = 2) = (\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c) \cup (V_a \cap \overline{V}_b \cap V_c) \cup (V_a \cap V_b \cap \overline{V}_c).$$

Comme les événements  $(\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c)$ ,  $(V_a \cap \overline{V}_b \cap V_c)$  et  $(V_a \cap V_b \cap \overline{V}_c)$  sont deux à deux incompatibles,

$$P(N = 2) = P(\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c) + P(V_a \cap \overline{V}_b \cap V_c) + P(V_a \cap V_b \cap \overline{V}_c) = \frac{3}{3^5} = \frac{1}{3^4}.$$

### Partie IV. Espérance de $N$

1. On note  $Z_a$  la variable aléatoire égale à 1 si  $V_a$  est réalisé et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations  $Z_b$  ( $Z_b$  vaut 1 si  $V_b$  est réalisé et 0 sinon) et  $Z_c$  ( $Z_c$  vaut 1 si  $V_c$  est réalisé et 0 sinon).

• Reconnaissance de la loi de  $Z_a$ , de  $Z_b$  et de  $Z_c$ .

On sait grâce au cours que  $Z_a$ ,  $Z_b$  et  $Z_c$  suivent une loi de Bernoulli. Le paramètre de chacune est  $P(Z_a = 1)$  (Les trois lois sont identiques toujours en invoquant la symétrie du problème par rapport à  $a$ ,

$b$  et  $c$ . Or :  $P(Z_a = 1) = P(V_a) = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$ . On écrit :  $Z_a \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{32}{243}\right)$ ,  $Z_b \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{32}{243}\right)$  et  $Z_c \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{32}{243}\right)$ .

On sait que l'espérance d'une loi de Bernoulli est son paramètre donc :

$$E(Z_a) = E(Z_b) = E(Z_c) = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}.$$

2. On note toujours  $N$  le nombre d'urnes vides. Exprimons  $N$  en fonction de  $Z_a$ ,  $Z_b$  et  $Z_c$ .

Les v.a.r  $Z_a$ ,  $Z_b$  et  $Z_c$  sont des fonctions indicatrices. Et  $Z_a + Z_b + Z_c$  est une v.a.r qui compte le nombre d'urnes vides.

Donc :  $N = Z_a + Z_b + Z_c$ .

3. L'espérance de  $N$  est :

$$E(N) = E(Z_a + Z_b + Z_c) = E(Z_a) + E(Z_b) + E(Z_c) = \frac{2^5}{3^5} + \frac{2^5}{3^5} + \frac{2^5}{3^5} = \frac{3 \times 2^5}{3^5} = \frac{2^5}{3^4}.$$

### Partie V. Détermination de la loi de $N$

1. Montrons que  $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4}$ .

On sait que  $E(N) = 0 \times P(N = 0) + 1 \times P(N = 1) + 2 \times P(N = 2) + 3 \times P(N = 3)$ . Comme  $P(N = 3) = 0$ ,

$$E(N) = P(N = 1) + 2 \times P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4}.$$

2. Déduisons en la valeur du réel  $P(N = 1)$ .

On écrit :  $P(N = 1) + 2 \times P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4} \Rightarrow P(N = 1) = \frac{2^5}{3^4} - 2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{30}{3^4} = \frac{10}{27}$ .

3. Donnons enfin la loi de la variable aléatoire  $N$ .

On click and collect les résultats précédents, qui sont :  $P(N = 1) = \frac{30}{3^4}$ ,  $P(N = 2) = \frac{1}{3^4}$ ,  $P(N = 3) = 0$ .

Et donc cela entraîne :  $P(N = 0) = 1 - P(N = 1) - P(N = 2) - P(N = 3) = \frac{50}{3^4} = \frac{50}{81}$ .