Correction DS03

Correction Exercice 01

Q1. • Si $\vec{u} \in \mathsf{Ker}\, f \cap \mathsf{Im}\, f$, il existe $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{u}$ et $f(\vec{u}) = 0$.
Donc $f^3(\vec{v}) = f^2(\vec{u}) = -f(\vec{v}) = -\vec{u} = 0$ et ainsi $\vec{u} = 0$. La somme $\mathsf{Ker}\, f + \mathsf{Im}\, f$ est directe.

• Comme $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, f + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, f = 3$, on peut en conclure que les deux sous-espaces vectoriels $\mathsf{Ker}\, f$ et $\mathsf{Im}\, f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Commentaires : Montrons (pour le fun) que $\mathbb{R}^3 = \mathsf{Ker}\, f + \mathsf{Im}\, f$ par **analyse-synthèse**.
Analyse : soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ et supposons $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in \mathsf{Ker}\, f$ et $\vec{z} \in \mathsf{Im}\, f$. Alors il existe $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + f(\vec{t})$. On va utiliser $f^3 = -f$.

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) + f^2(\vec{t}) = f^2(\vec{t}) \Rightarrow f^2(\vec{x}) = f^3(\vec{t}) = -f(\vec{t}) = \vec{y} - \vec{x}$$

$$\Rightarrow f^2(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{x} \Rightarrow \vec{y} = \vec{x} + f^2(\vec{x}) \Rightarrow \vec{z} = -f^2(\vec{x}).$$

Synthèse : Posons $\vec{x} = \vec{x} + f^2(\vec{x}) - f^2(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$f(\vec{x} + f^2(\vec{x})) = f(\vec{x}) + f^3(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} + f^2(\vec{x}) \in \mathsf{Ker}\, f.$$

Puis : $-f^2(\vec{x}) = f(-f(\vec{x})) \in \mathsf{Im}\, f$. Donc $\mathbb{R}^3 \subset \mathsf{Ker}\, f + \mathsf{Im}\, f$. La réciproque est immédiate car $\mathsf{Im}\, f$ et $\mathsf{Ker}\, f$ sont inclus dans $\mathbb{R}^3$. On a bien : $\mathbb{R}^3 = \mathsf{Ker}\, f + \mathsf{Im}\, f$ (sans passer par le théorème du rang).

Q2 Si λ est valeur propre de f associé au vecteur propre $\vec{x} \neq 0$, $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

$$f^3(\vec{x}) = \lambda^3\vec{x} = -f(\vec{x}) = -\lambda\vec{x} \Rightarrow \lambda^3 + \lambda = 0.$$

Or $\lambda = 0$ est solution de cette équation. Les deux autres racines sont $\pm i$ donc complexes non réelles.

Commentaires : Attention, toutes les racines de $x^3 + x = 0$ ne sont pas nécessairement des valeurs propres de f. On peut simplement dire que les valeurs propres complexes de f sont parmi les valeurs $\pm i$ et 0. Il faut un raisonnement supplémentaire pour écrire que ce sont celles-là.

Il s'agit de prouver que 0 est effectivement une valeur propre. On sait que le polynôme caractéristique de f est un polynôme réel de degré 3 donc qui admet au moins une racine réelle donc f a au moins une valeur propre réelle. Or 0 est la seule valeur réelle possible donc c'est elle. On a donc prouvé que f ne possède qu'une valeur propre réelle, c'est 0.

Q3 • Montrons que $\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Ker}\,(f^2 + Id)$.
Inclusion directe : Soit $\vec{u} \in \mathsf{Im}\, f$ et posons $\vec{v} = f^2(\vec{u}) + \vec{u}$. On a déjà : $\vec{v} \in \mathsf{Im}\, f$ comme somme de deux vecteurs de $\mathsf{Im}\, f$. Puis $f(\vec{v}) = 0$ donc $\vec{v} \in \mathsf{Ker}\, f \cap \mathsf{Im}\, f$. Donc $\vec{v} = 0$. Et $\vec{u} \in \mathsf{Ker}\,(f^2 + Id)$.
Inclusion réciproque : Soit $\vec{u} \in \mathsf{Ker}\,(f^2 + Id)$ alors $f^2(\vec{u}) = -\vec{u}$ donc $\vec{u} = f(-f(\vec{u})) \in \mathsf{Im}\, f$.
En conclusion, on a bien l'égalité : $\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Ker}\,(f^2 + Id)$.

• On va construire la matrice ou plutôt une base dans laquelle f est représentée par cette matrice. On commence par remarquer que $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, f = 1$. En effet, f a trois valeurs propres complexes dont la valeur propre 0. Et l'espace propre associé à 0 (qui est $\mathsf{Ker}\, f$) est de dimension 1. Et par voie de conséquence, $\mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, f = \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,(f^2 + Id) = 2$ d'après le théorème du rang. Vue la matrice souhaitée qui a pour première colonne la colonne nulle, on choisit $\vec{e}_1$ vecteur **non nul** du noyau de f pour premier vecteur de la base que l'on construit. Prenons $\vec{e}_3$ vecteur **non nul** de l'image $\mathsf{Im}\, f$ et considérons $\vec{e}_2 = f(\vec{e}_3)$. On remarque au passage que $\vec{e}_2 \in \mathsf{Im}\, f$.
La matrice de f dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ a bien sa première et troisième colonne comme convenu.
Puis $f(\vec{e}_2) = f^2(\vec{e}_3)$. Comme $\vec{e}_3 \in \mathsf{Im}\, f$ alors $f^2(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3 = f(\vec{e}_2)$.

On a bien : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Commentaires : Il reste à vérifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. C'est la moindre des choses. Comme $\mathsf{Ker}\, f$ et $\mathsf{Im}\, f$ sont supplémentaires et comme $\vec{e}_1 \in \mathsf{Ker}\, f$ et $(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \in (\mathsf{Im}\, f)^2$, il suffit de vérifier que $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est libre. Posons a et b deux réels tels que $a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3 = 0$. Et combinons par f. On utilise $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3$.

On a le système : $\left\{ \begin{array}{lcl} a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3 & = & 0 \\ b\vec{e}_2 - a\vec{e}_3 & = & 0 \end{array} \right.$.

On multiplie toute la première ligne par a et toute la deuxième ligne par b. Puis on ajoute les deux nouvelles lignes. On obtient $(a^2 + b^2)\vec{e}_2 = 0$. Or $\vec{e}_2 \neq 0$ car sinon $f(\vec{e}_3) = 0$ donc $\vec{e}_3 \in \mathsf{Ker}\, f$ et comme $\vec{e}_3 \in \mathsf{Im}\, f$, $\vec{e}_3 = 0$. Exclu. Il reste : $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

Correction Exercice 02

Q1. On a : $\chi_A(t) = (t-1)^2 - 1 = (t-2)t$. Le spectre de A est $\{0, 2\}$.
On sait que A est diagonalisable (car a deux valeurs propres distinctes en dimension 2).
Pour commencer, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_A(0)$ si et seulement si $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On trouve alors rapidement : $E_A(0) = \mathsf{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_A(2)$ si et seulement si $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.
On trouve aussi rapidement : $E_A(2) = \mathsf{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Il reste à poser $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}.A.P$ est diagonale, égale à $\text{diag}(0, 2)$.

Q2-a Supposons $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$ et posons comme l'énoncé nous dit la matrice : $\Delta = P^{-1}XP$. On écrit :

$$X^2 + X = A \Leftrightarrow P^{-1}X^2P + P^{-1}XP = P^{-1}AP \Leftrightarrow D = \Delta^2 + \Delta.$$

Q2-b Puis : $\Delta D = \Delta^3 + \Delta^2 = D\Delta$ et donc D et Δ commutent.
Posons $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, utilisons la commutativité de D et de Δ.

$$\Delta D = D\Delta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2\beta \\ 0 & 2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\gamma & 2\delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta = \gamma = 0.$$

Donc $\Delta = \text{diag}(\alpha,\, \delta)$, où α et δ sont les seuls coefficients à encore déterminer.

Commentaires : On a donc montré au passage que si X est solution de $X^2 + X = A$, alors X est diagonalisable (dans la même base de diagonalisation que A).
De plus, on peut « deviner » $\chi_X(t)$, c'est $(t - \alpha)(t - \delta)$.

Q2-c L'égalité $\Delta^2 + \Delta = D$ donne matriciellement : $\begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha & 0 \\ 0 & \delta^2 + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de X sont constituées d'un couple (α, δ) où (quitte à échanger α et δ) : $\alpha \neq \delta$ avec α solution de $r^2 + r = 0$ et δ solution de $r^2 + r = 2$.
Ce qui revient à dire que $(\alpha, \delta) \in \{-1, 0\} \times \{-2, 1\}$.

Les quatre couples ainsi trouvés définissent autant de matrices diagonales, c'est-Ã -dire après changement de base, autant de matrices X du type $P.\text{diag}(\alpha, \delta).P^{-1}$, où le couple (α, δ) appartient à $\{-1, 0\} \times \{-2, 1\}$.

Réciproquement si $X = P.\text{diag}(\alpha,\delta).P^{-1}$, où le couple $(\alpha,\delta) \in \{-1,0\} \times \{-2,1\}$, on peut vérifier rapidement que :

$$X^2 + X = P\left((\text{diag}(\alpha,\delta))^2 + \text{diag}(\alpha,\delta)\right)P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Correction Exercice 03

Q1. Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(P+\lambda Q) = (1-X^2)(P+\lambda Q)' + (1+2X)(P+\lambda Q)$$

$$= (1-X^2)P' + (1+2X)P + \lambda((1-X^2)P' + (1+2X)P) = f(P) + \lambda f(Q).$$

Comme f est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, on peut en déduire que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2. Suivons donc l'indication donnée dans le décryptage au début de l'énoncé.

On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme supposé de degré n inconnu et on suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$ (aussi inconnue) est la valeur propre associée à P en tant que vecteur propre.

$$f(P) = (1-X^2)\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} + (1+2X)\sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On développe le second membre de l'égalité.

$$f(P) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} (2-k) a_k X^{k+1}.$$

On remarque donc que $f(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Le coefficient devant X^{n+1} est $(2-n)a_n$. Enfin, comme $f(P) = \lambda P$, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $a_n \neq 0$, $n = 2$ nécessairement.

Les seuls vecteurs propres possibles sont des polynômes de degré 2.

Partons maintenant de $P = X^2 + aX + b$ et identifions $f(P) = \lambda P$.

Commentaires : On peut normaliser P car une base de vecteurs propres nous suffit.

$$f(P) = (1+a)X^2 + (a+2b+2)X + a + b = \lambda X^2 + \lambda a X + \lambda b \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 1+a & = & \lambda \\ a+2b+2 & = & \lambda a \\ a+b & = & \lambda b \end{array}\right. .$$

Ainsi $a + b = (1+a)b$ et donc $ab = a$ ce qui implique $b = 1$ ou $a = 0$.

- Si $b = 1$, $1 + a = \lambda$ et $a + 4 = (a+1)a$, ce qui donne $a^2 = 4$ et donc $a = \pm 2$. On obtient deux vecteurs propres.

$$P_1 = X^2 + 2X + 1 \text{ avec } \lambda_1 = 3,\ P_2 = X^2 - 2X + 1 \text{ avec } \lambda_2 = -1.$$

- Si $a = 0$, $b = -1$ et $\lambda = 1$. On obtient un vecteur propre.

$$P_3 = X^2 - 1 \text{ avec } \lambda_3 = 1.$$

Commentaires : Quand on a montré que les seuls vecteurs propres possibles sont des polynômes de degré 2, la fin de l'exercice peut être modifiée. En effet, on remarque immédiatement que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par f. On peut chercher ensuite les vecteurs propres de l'endomorphisme g, restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$. Cet endomorphisme a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(t) = (t-1)(t-3)(t+1)$. On trouve les vecteurs propres associés qui sont ceux trouvés plus haut.

Correction Exercice 04

Q1. On a : $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = (t-1)((t-2)t+1) = (t-1)^3$.
Si A est diagonalisable alors A est semblable à I_3 donc est I_3. C'est absurde et A n'est pas diagonalisable.

Commentaires : Et c'est là où on dit qu'il est conseillé de lire tout l'énoncé avant de commencer. En effet, vu la question **Q2**, il est clair que A n'est que trigonalisable.

Q2. A est bien trigonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.

Commentaires : Les exercices sur la trigonalisation d'une matrice A dont on connait le polynôme caractéristique (et donc les valeurs propres) sont de deux genres.
1) Premier genre : On donne la base de trigonalisation (donc la matrice de passage P). Par exemple, on peut prendre un maximum de vecteurs propres indépendants puis on complète par un ou des vecteurs fournis par l'énoncé. Puis on cherche la matrice triangulaire supérieure T en n'oubliant pas que la diagonale principale de T est constituée des racines du polynôme caractéristique (scindé) de A. Il reste à trouver les coefficients de T au dessus strictement de la diagonale principale. On utilise alors $PT = AP$ pour trouver ces coefficients.
2) Second genre : On connait la matrice triangulaire T (comme dans cette planche). On commence comme plus haut à prendre un maximum de vecteurs propres indépendants. Puis on complète par des colonnes inconnues (donc des coefficients inconnus). On utilise enfin encore $PT = AP$ et on en déduit par identification les coefficients de P manquant. On trouve en général une infinité de solutions. Autant prendre une simple (en gros avec le maximum de zéros).
Remarquons que dans les deux genres, le calcul de P^{-1} est inutile.

On commence donc par chercher une base de vecteurs propres associée à l'unique valeur propre de A qui est 1.
On résout $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on trouve rapidement $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Notre matrice de passage P qui est carrée d'ordre 3 connait déjà ses deux premières colonnes C_1 et C_2. Pour la troisième colonne C_3, elle reste inconnue.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Puis $T = P^{-1}AP \Rightarrow PT = AP$. On lance l'identification.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1+b \\ 0 & 1 & 1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2b-c \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

La seule condition est $b = 1 + c$.

Prenons $a = c = 0$ et la troisième colonne choisie de P est $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bilan : En prenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $T = P^{-1}AP$ et A et T sont bien semblables.

Q3. Pour calculer T^n, deux méthodes.

La première méthode est de calculer $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de « deviner » T^n et de faire une récurrence.

Sans être un grand médium, on voit que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$T^{n+1} = T^nT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une seconde méthode est de poser $T = I_3 + B$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a rapidement $B^2 = 0$. Comme les matrices B et I_3 commutent, on applique la formule du binôme de Newton avec $n \geqslant 1$.

$$T^n = (B + I_n3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B = I_3 + nB.$$

On retrouve bien T^n trouvée avec la première méthode.

Commentaires : Ceux qui lisent l'énoncé jusqu'au bout avant de commencer ont pu penser directement à cette seconde méthode car c'est ce que l'on va faire à **Q4**.

Il reste à calculer A^n. On sait que $A = PTP^{-1}$. Vérifions par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$. On suppose le résultat vrai pour le rang n.

$$A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

Commentaires : Cette preuve par récurrence n'est pas obligatoire à l'oral. Vous dites à l'examinateur que vous pouvez la faire et s'il estime que vous avez le temps, il vous la demandera et vous vous exécuterez.

Puis on calcule P^{-1}. On peut inverser le système $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

On a : $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 \\ x_2 + x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_3 & = & y_2 - y_3 \end{array} \right.$

On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On trouve $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & -n \\ 0 & n & -n+1 \end{pmatrix}$.

Commentaires : On vérifie bien entendu que $A^0 = I_3$ et $A^1 = A$. **Q4.** On a $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a rapidement $N^2 = 0$. Comme $I_3 N = N I_3$, on applique la formule du binôme de Newton qui est légitime.

$$A^n = (N + I_n 3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N = I_3 + nN.$$

On retrouve bien A^n trouvée avec la première méthode.

Correction Exercice 05

Calculons le lot de primitives et d'intégrales suivants :

$$F_1(t) = \int t \ln t \, dt, \; F_2(t) = \int \frac{(\ln t)^{2024}}{t} \, dt, \; F_3(t) = \int \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \, dt,$$

$$I_1 = \int_0^1 t \, e^{2t} \, dt, \; I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^3 + 3t^2 - t - 3}, \; I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + t^2}.$$

- **Calcul de** $F_1(t)$

On procède à une intégration par parties.

$$F_1(t) = \int t \ln t \, dt = -\int \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} \, dt + \frac{t^2}{2} \ln t = -\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \ln t + K, \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

- **Calcul de** $F_2(t)$

Il suffit de poser $u(t) = \ln t$.

$$F_2(t) = \int \frac{(\ln t)^{2024}}{t} \, dt = \int (u(t))^{2024} u'(t) = \frac{1}{2025} (\ln t)^{2025} + K, \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

- **Calcul de** $F_3(t)$

$$F_3(t) = \int \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \, dt = -\frac{d(\cos t)}{1 + \cos^2 t} = -\arctan(\cos t) + K.$$

- **Calcul de** I_1

On fait une intégration par parties en dérivant t et en intégrant e^{2t}.

$$I_1 = \int_0^1 t \, e^{2t} \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{2t} \, dt + \left[\frac{t}{2} e^{2t} \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{4} e^{2t} \right]_0^1 + \left[\frac{t}{2} e^{2t} \right]_0^1$$

Et le lecteur trouvera :

$$I_1 = -\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} + -\frac{1}{2} e^2 = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

- **Calcul de I_2**

On commence par remarquer que $(t-1)(t+1)(t+3) = t^3 + 3t^2 - t - 3$.

Posons $G(t) = \dfrac{1}{(t-1)(t+1)(t+3)}$.

$$[(t-1)G(t)]_{t=1} = \left[\frac{1}{(t+1)(t+3)}\right]_{t=1} = \frac{1}{8} = a.$$

$$[(t+1)G(t)]_{t=-1} = \left[\frac{1}{(t-1)(t+3)}\right]_{t=-1} = -\frac{1}{4} = b.$$

$$[(t+3)G(t)]_{t=-3} = \left[\frac{1}{(t-1)(t+1)}\right]_{t=-3} = \frac{1}{8} = c.$$

On peut donc scinder I_2 en trois intégrales.

$$I_2 = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t+3}.$$

$$I_2 = \frac{1}{8}\left[\ln|t-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\left[\ln|t+1|\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\left[\ln|t+3|\right]_0^{\frac{1}{2}}.$$

Il reste : $I_2 = \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{8}\ln 3 = \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{7}{12}$.

- **Calcul de I_3**

L'idée est donc de mettre $1 + t + t^2$ sous forme canonique.

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2 + \dfrac{3}{4}}.$$

On a posé à la fin le changement de variable $x = t + \frac{1}{2}$.

$$I_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

Or $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Donc : $I_3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.