2TSI. DEVOIR SURVEILLE N°03

Samedi 02 décembre 2023

Les cinq exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. La durée est de 4 heures et les calculettes sont interdites.

Exercice 01

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ **non nul** tel que $(f^2 + Id)\, o\, f = f\, o\, (f^2 + Id) = f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   Enoncer le théorème du rang. Justifier alors que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
2. Montrer que si λ est valeur propre de f, $\lambda^3 + \lambda = 0$. En déduire que f admet au moins une valeur propre réelle.
3. Montrer que $\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Ker}\,(f^2 + Id)$ par double inclusion.
4. On veut construire une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On choisit $\vec{e}_1$ vecteur **non nul** du noyau de f pour premier vecteur de cette base que l'on construit. Prenons $\vec{e}_3$ vecteur **non nul** de l'image $\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Ker}\,(f^2+Id)$ et considérons $\vec{e}_2 = f(\vec{e}_3)$. On remarque au passage que $\vec{e}_2 \in \mathsf{Im}\, f = \mathsf{Ker}\,(f^2 + Id)$.
   (a) Trouver une relation entre $\vec{e}_3$ et $f(\vec{e}_2)$.
   (b) Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Pourquoi est ce une base de $\mathbb{R}^3$?
   (c) En déduire la matrice voulue.

Exercice 02

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A en déterminant une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$. **On choisira D de telle manière que si λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres, $\lambda_1 < \lambda_2$ et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. On choisira P telle que la première ligne ne soit composée que de 1. Enfin, on se fixe ces matrices P et D dans la suite.**
2. On suppose ici $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$ et on pose $\Delta = P^{-1}XP$.
   (a) Calculer $\Delta^2 + \Delta$ en fonction de D.
   (b) Montrer que $D\Delta = \Delta D$. En posant $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, montrer que $\beta = \gamma = 0$ et donc que Δ est diagonale.
   (c) Déterminer alors toutes les matrices Δ possibles et en déduire toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$.

Exercice 03

Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto (1 - X^2)P' + (1 + 2X)P$, où P' désigne la dérivée de P et $\mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes réels.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. On désire trouver les éléments propres de f. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme supposé de degré n inconnu (donc $a_n \neq 0$) et on suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$ (aussi inconnue) est la valeur propre associée à P en tant que vecteur propre.
   (a) En partant de $f(P) = \lambda P$, en déduire la seule valeur de n possible.

(b) On pose $P = X^2 + aX + b$ un vecteur propre de f associé à λ. Justifier la pertinence de ce choix. Trouver par identification des relations entre a, b et λ puis en déduire trois polynômes P_1, P_2 et P_3 qui sont des vecteurs propres de f en fournissant leurs valeurs propres associées λ_1, λ_2 et λ_3 respectives.

Exercice 04

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres associés à l'unique valeur propre de A. On considère une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ dont les deux premières colonnes sont constitués de la base trouvée et la troisième colonne indeterminée constituée de trois coefficients a, b et c.
   On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une (ou des) relations entre a, b et c pour que $PT = AP$.
3. On choisit $a = c = 0$ dans P. Pourquoi ce choix est possible ? Calculer T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ puis P^{-1} et en déduire $A^n = PT^nP^{-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. On introduit la matrice N telle que $A = I_3 + N$. Calculer N^2.
   Retrouver A^n en utilisant la formule du binôme de Newton et donc sans utiliser la méthode de la question **Q3**

Exercice 05

Calculer le lot de primitives et d'intégrales suivants :

$$F_1(t) = \int t \ln t \, dt,\ F_2(t) = \int \frac{(\ln t)^{2024}}{t} \, dt,\ F_3(t) = \int \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \, dt,$$

$$I_1 = \int_0^1 t\, e^{2t} \, dt,\ I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^3 + 3t^2 - t - 3},\ I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + t^2}.$$

Indications

Pour $F_1(t)$, penser à une I.P.P.
Pour $F_2(t)$ et $F_3(t)$, on pensera à un certain tableau.
Pour I_1, on fera une I.P.P.
Pour I_2, on cherchera a, b et c tels que $\dfrac{1}{(t-1)(t+1)(t+3)} = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{t+3}$.
Pour I_3, on pensera à mettre $t^2 + t + 1$ sous forme canonique.