Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME

2022

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques PT - TSI (3h)

■ EXERCICE I : CALCUL D'INTÉGRALES

1°) 1°) *Calcul de l'intégrale* $J(0)$

Posons $t = u\sqrt{\pi}$ dans l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Cette l'application $u \mapsto u\sqrt{\pi}$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et donc ce changement de variables ne modifie ni l'existence ni la valeur de l'intégrale, de sorte qu'on a :

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Il en résulte que l'intégrale $J(0)$ converge et vaut :

$$J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u = 1.$$

2°) *Une inégalité préliminaire*

a) Etudions sur $\mathbb{R}_+$fonctions définies par $a(u) = u - \sin(u)$ et $b(u) = u + \sin(u)$.

On a : $a'(u) = 1 - \cos(u) \geq 0$ et : $b'(u) = 1 + \cos(u) \geq 0$ d'après l'inégalité : $-1 \leq \cos(u) \leq 1$.

Comme : $a(0) = 0$ et $b(0) = 0$, on en déduit pour $u \geq 0$: $a(u) \geq a(0) = 0$ et $b(u) \geq b(0) = 0$.

Ces inégalités montrent qu'on a pour $u \geq 0$: $u - \sin(u) \geq 0$ et $u + \sin(u) \geq 0$.

D'où pour $u \geq 0$: $-u \leq \sin(u) \leq u$ ou : $|\sin(u)| \leq u = |u|$.

Comme $\sin(-u) = -\sin(u)$, on a toujours pour $u \geq 0$: $|\sin(-u)| = |\sin(u)| \leq |u| = |-u|$.

L'inégalité $|\sin(u)| \leq |u|$ est ainsi établie pour u et -u avec $u \geq 0$, donc pour tout réel u.

b) En exploitant l'inégalité : $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$, on a maintenant :

$$\left|e^{iu} - 1\right| = \left|e^{\frac{iu}{2}}\left(e^{\frac{iu}{2}} - e^{-\frac{iu}{2}}\right)\right| = \left|2\,i\,e^{\frac{iu}{2}}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{u}{2}\right| = |u|.$$

c) Pour tout réel x, un simple calcul de primitives donne l'égalité suivante :

$$i\int_0^x \left(e^{iu} - 1\right)\mathrm{d}u = \left[e^{iu} - i\,u\right]_0^x = e^{ix} - 1 - i\,x.$$

d) L'inégalité de la moyenne donne alors pour $x \geq 0$:

$$\left|e^{ix} - 1 - i\,x\right| = \left|\int_0^x \left(e^{iu} - 1\right)\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^x \left|e^{iu} - 1\right|\mathrm{d}u \leq \int_0^x u\,\mathrm{d}u = \frac{x^2}{2}.$$

Et on a pour $x \leq 0$, compte tenu de $|u| = -u$ pour $x \leq u \leq 0$:

$$\left|e^{ix} - 1 - i\,x\right| = \left|\int_0^x \left(e^{iu} - 1\right)\mathrm{d}u\right| \leq \int_x^0 \left|e^{iu} - 1\right|\mathrm{d}u \leq \int_x^0 -u\,\mathrm{d}u = \frac{x^2}{2}.$$

3°) *Dérivabilité de la fonction J*

a) L'application $t \mapsto e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a : $\left|e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\right| = e^{-\pi t^2} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

La fonction continue $t \mapsto e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}$ est donc intégrable au voisinage de $\pm\infty$, et donc sur $\mathbb{R}$.
L'intégrale $J(x)$ est donc bien définie pour tout réel x.

b) Exploitons l'inégalité de la moyenne, puis l'inégalité obtenue à la question 2 :

$$\left|J(x+h) - J(x) - i\pi h \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\left(e^{i\pi h t} - 1 - i\pi h t\right)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\left|e^{i\pi h t} - 1 - i\pi h t\right|\mathrm{d}t \leq \frac{\pi^2 h^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t$$

et cette dernière intégrale est bien convergente puisqu'on a au voisinage de $\pm\infty$: $t^2 e^{-\pi t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

c) L'inégalité précédente s'écrit aussi après division par $|h|$:

$$\left|\frac{J(x+h) - J(x)}{h} - i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi^2 |h|}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En faisant alors tendre h vers 0, le majorant à droite tend vers 0 et l'existence de $J'(x)$ en résulte :

$$J'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{J(x+h) - J(x)}{h} = i\pi\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t.$$

4°) *Calcul de l'intégrale $J(x)$ et d'une intégrale associée*

a) Une intégration par parties dans l'intégrale $J'(x)$ donne alors :

$$J'(x) = -\frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi t\, e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t = -\frac{i}{2}\left[e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\pi x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette intégration a un sens puisque le crochet est nul (car $\lim_{\pm\infty}\left|e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\right| = \lim_{\pm\infty} e^{-\pi t^2} = 0$), et la dernière intégrale n'est autre que $J(x)$, de sorte qu'on a obtenu :

$$J'(x) + \frac{\pi x}{2} J(x) = 0.$$

b) Comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\frac{\pi x^2}{4}} J(x)\right) = e^{\frac{\pi x^2}{4}}\left(J'(x) + \frac{\pi x}{2} J(x)\right) = 0$, il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que : $e^{\frac{\pi x^2}{4}} J(x) = C$.

On en déduit que : $J(x) = C\, e^{-\frac{\pi x^2}{4}}$, et par évaluation en 0, on voit que $C = J(0) = 1$, d'où :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t = e^{-\frac{\pi x^2}{4}}.$$

c) En exploitant la formule d'Euler, on obtient l'existence et la valeur de l'intégrale $K(x)$:

$$K(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i\pi x t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(J(x) + J(-x)\right) = J(x) = e^{-\frac{\pi x^2}{4}}.$$

EXERCICE II : ÉTUDE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

1°) *Algorithme de calcul des coefficients* $\binom{2n}{n}$ *de la série entière définissant f*

a) Les premiers termes de la série étudiée sont :

$$\sum_{n=0}^{5}\binom{2n}{n}x^n = 1+2x+6x^2+20x^3+70x^4+252x^5.$$

b) Etudions l'égalité suivante :

$$\binom{2n+2}{n+1} = r_n\binom{2n}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} = r_n\,\frac{(2n)!}{n!\,n!}.$$

En simplifiant par $\frac{(2n)!}{n!\,n!}$, il vient :

$$\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = r_n \quad \text{ou} \quad r_n = \frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

c) On peut dès lors calculer comme suit les coefficients successifs $\binom{2n}{n}$:

- on note que $c_0 = \binom{0}{0} = 1$.

- pour $0 \le n \le N$, on calcule $r_n = \frac{2(2n+1)}{n+1}$ et on obtient $c_{n+1} = r_n\,c_n$.

On obtient donc en $O(N)$ opérations les coefficients $c_n = \binom{2n}{n}$ pour $O \le n \le N$.

En Python, cet algorithme s'écrit comme suit :

```
def coefficient_binomial(N):
    C=1
    print(C)
    for k in range(N):
        r=2*(2*k+1)/(k+1)
        C=r*C
        print(C)
    return

print('Donner un entier naturel N : ')
N=int(input(N))
coefficient_binomial(N)
```

2°) *Domaine de convergence de la série entière*

a) Pour $x = \pm 1$, la série considérée devient $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}$.

Dans les deux cas, la suite des coefficients est une suite de nombres entiers non nuls, donc une suite ne tendant pas vers 0 : la série diverge donc grossièrement.

Pour $x = 0$, on a : $f(0) = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\times 0!} = 1$.

b) Comme $r_n = \frac{2(2n+1)}{n+1}$, on voit que r_n tend vers 4 lorsque n tend vers $+\infty$ puisque $r_n \sim \frac{4n}{n} = 4$.

c) Etudions la convergence absolue de la série entière proposée avec la règle d'Alembert :

$$\left| \frac{\binom{2n+2}{n+1} x^{n+1}}{\binom{2n}{n} x^n} \right| = r_n\,|x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4\,|x|.$$

On en déduit que pour $4\,|x| < 1$, la série entière converge absolument, donc converge.
Et pour $4\,|x| > 1$, la série entière diverge grossièrement. On en déduit que $R = 1/4$.

3°) *Sommation de la série entière définissant la fonction f*

a) On sait qu'une série entière est ce classe C^∞ sur $]-R, R[$ si $R > 0$ est son rayon de convergence. Et on obtient ses dérivées par dérivation terme à terme.

Ici, la fonction f est donc de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right[$ et on a :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \binom{2n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \binom{2n+2}{n+1} x^n.$$

b) Exprimons $(1-4x)\,f'(x)$ en fonction de $f(x)$ sur l'intervalle de convergence :

$$\begin{aligned} f'(x) - 4x\,f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \binom{2n+2}{n+1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n \binom{2n}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, r_n \binom{2n}{n} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n \binom{2n}{n} x^n \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \binom{2n}{n} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n \binom{2n}{n} x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = 2\,f(x). \end{aligned}$$

c) On a donc établi que : $(1-4x)\,f'(x) - 2\,f(x) = 0$ pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right[$.

Il en résulte qu'on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{1-4x}\; f(x)\right) = \sqrt{1-4x}\; f'(x) - \frac{2}{\sqrt{1-4x}}\, f(x) = \frac{(1-4x)\,f'(x) - 2\,f(x)}{\sqrt{1-4x}} = 0.$$

Il existe donc une constante réelle C telle que, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right[$:

$$\sqrt{1-4x}\; f(x) = C.$$

Et par évaluation en 0, on voit que : $C = f(0) = 1$, ce qui implique pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right[$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

d) La dérivée de $t \mapsto \sqrt{1-4t}$ est $t \mapsto \frac{-2}{\sqrt{1-4t}}$ dont on connaît le développement en série entière :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{1-4\,x}\right) = \frac{-2}{\sqrt{1-4\,x}} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2\,n}{n}x^n.$$

On sait qu'une série entière s'intègre terme à terme avec le même rayon de convergence, donc on a par intégration sur $[0, x]$ avec $x \in \left]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right[$:

$$\sqrt{1-4\,x} = 1-2\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2\,n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4°) *Estimation des coefficients de la série entière*

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2\,n}{n}$ et $v_n = \frac{\sqrt{n+1}}{4^n}\binom{2\,n}{n}$.

a) Il en résulte aussitôt qu'on a pour $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}}\,r_n = \frac{2\,(2\,n+1)}{4\sqrt{n(n+1)}} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}} \geq 1$$

car : $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = n^2+n+\frac{1}{4} \geq n^2+n = n(n+1)$, d'où $n+\frac{1}{2} \geq \sqrt{n(n+1)}$.

Comme les réels u_n sont positifs, la suite (u_n) est croissante pour $n \geq 1$, et en fait pour $n \geq 0$.

b) On a : $u_1 = \frac{1}{4}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}$, et comme la suite est croissante : $\forall\, n \geq 1,\ u_n \geq \frac{1}{2}$, ou : $\binom{2\,n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

c) On a de même :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{n+2}}{4\sqrt{n+1}}\,r_n = \frac{2\,(2\,n+1)\sqrt{n+2}}{4\,(n+1)\sqrt{n+1}} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+2}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq 1$$

car : $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(n+2) = \left(n^2+n+\frac{1}{4}\right)(n+2) = n^3+3\,n^2+\frac{9\,n}{4}+\frac{1}{2} \leq n^3+3\,n^2+3\,n+1 = (n+1)^3$.

Comme les réels v_n sont positifs, la suite (v_n) est décroissante.

Et comme $v_0 = 1$, on a : $\forall\, n \geq 0,\ v_n \leq v_0 = 1$, ou : $\binom{2\,n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{n+1}}$.

d) On a finalement l'encadrement suivant pour les coefficients de la série entière pour $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2}\,\frac{4^n}{\sqrt{n}} \leq \binom{2\,n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

A l'extrémité droite de l'intervalle de convergence, pour $x = \frac{1}{4}$, on a donc :

$$\binom{2\,n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série entière proposée diverge a fortiori en $\frac{1}{4}$.

On pourrait en revanche vérifier qu'elle converge en $-\frac{1}{4}$.
