

**CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES**

Colle 17

Du 29 janvier 2024 au 02 février 2024

1) Espaces euclidiens et préhilbertiens

Révision colle 16.

2) Fonctions de plusieurs variables

Parties ouvertes, parties fermées, point adhérent, point intérieur, frontière, partie bornée. Notion de continuité et de dérivée partielle première ou seconde de fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} avec $p = 2$ ou $p = 3$. Fonctions de classe \mathcal{C}^1 ou de classe \mathcal{C}^2 . Vecteur gradient. Point critique. Extremum. Formule de Taylor à l'ordre 1.

Dérivées partielles premières et secondes de $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$. Règle de la chaîne.

Théorème d'Hermann Schwarz.

Tangente à une courbe du type $f(x_1, x_2) = 0$ dans le plan ou plan tangent à une surface du type $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ dans l'espace.

Know-how :

Sur les espaces préhilbertiens et euclidiens :

- 1) Montrer qu'une application est un produit scalaire.
- 2) Savoir reconnaître et appliquer Cauchy-Schwarz.
- 3) Déterminer une base orthonormale à partir d'une base quelconque par l'algorithme de Gram-Schmidt pour une base de deux ou trois vecteurs.
- 4) Déterminer la projection orthogonale sur F à partir d'une base orthonormale de F .
- 5) Reconnaître une matrice de projection orthogonale et déterminer ses éléments caractéristiques.
- 6) Déterminer la distance d'un vecteur \vec{x} à un sous-espace F en utilisant la projection orthogonale de \vec{x} sur F .

Sur les fonctions de plusieurs variables :

- 1) Savoir distinguer et trouver l'intérieur, l'adhérence, la frontière dans des cas simples.
- 2) Savoir ce qu'est un point intérieur, un point de la frontière et un point adhérent.
- 3) Étudier la continuité d'une fonction de plusieurs variables en un point (avec utilisation privilégiée des coordonnées polaires ou d'un chemin fourni par le colleur).
- 4) Calculer les dérivées partielles premières ou secondes en un point par dérivation par rapport à une variable, les autres étant fixes ou alors en revenant à la définition avec la limite.
- 5) Savoir montrer que f est de classe C^1 ou non sur \mathbb{R}^2 .
- 6) Savoir résoudre une équation aux dérivées partielles du premier ordre ou du second ordre avec un changement de variables affine ou en coordonnées polaires.
- 7) Savoir déterminer les points critiques et essayer avec aide de voir s'ils correspondent à des extremums (par étude du signe de $f(x_1, x_2) - f(a, b)$, où (a, b) est un point critique en faisant du bricolage car la formule de Taylor à l'ordre 2 et donc les matrices hessiennes sont hors programme).
- 8) Savoir si une fonction de deux variables est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , notamment par contraposée du théorème de Schwarz.
- 9) Écrire la tangente à $f(x, y) = 0$ ou le plan tangent à $f(x, y, z) = 0$ en un point non critique.