Korrektur DS N°04

Exercice 01

1. On considère l'équation différentielle : (E) $(1+4x)y'(x) - 2y(x) = 0$.
Rapidement, $y(x) = Ke^{\frac{1}{2}\ln(1+4x)} = K\sqrt{1+4x}$.

2. Déterminons les solutions de (E) développables en série entière.

On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. Alors :

$$(1+4x)y'(x) - 2y(x) = (1+4x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Cela donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n.$$

Ou encore :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n.$$

Et :

$$a_1 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} + 4na_n - 2a_n\right) x^n = 0.$$

Alors pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = -2\dfrac{2n-3}{n} a_{n-1}$ et $a_1 = 2a_0$.

$$a_n = -2\frac{2n-3}{n} \times -2\frac{2n-5}{n-1} \times -2\frac{2n-7}{n-2} \times ... \times -2\frac{3}{3} \times -2\frac{1}{2} \times 2a_0.$$

Soit : $a_n = \dfrac{(-2)^{n-1}}{n!}(2n-3)(2n-5)...1 \times 2a_0 \dfrac{(2n-2)(2n-4)...2}{(2n-2)(2n-4)...2}$.

Ou encore : $a_n = \dfrac{(-2)^{n-1}}{n!}\dfrac{(2n-2)!2a_0}{2^{n-1}(n-1)!} = \dfrac{(-2)^{n-1}(2n)!2a_0}{2^{n-1}n!(n-1)!(2n)(2n-1)} = \dfrac{(2n)!(-1)^{n-1}}{(n)!^2(2n-1)} a_0$.

On remarque que pour $n = 1$, on a bien $a_1 = 2a_0$. On en déduit que les solutions de (E) développables en série entière forme une droite vectorielle de base :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!(-1)^{n-1}}{(n)!^2(2n-1)} x^n.$$

Son rayon est déterminé plus loin.

3-a On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n$. On pose u_n le terme général de la série.

$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{(-1)^{n+1}(2n+2)!}{(2n+1)[(n+1)!]^2} \times \dfrac{(2n-1)(n!)^2}{(-1)^n(2n)!}\right| |x| = \left|\dfrac{2(2n-1)}{n+1}\right| |x|$.

Cette quantité tend vers $4|x|$ quand n tend vers $+\infty$.
Donc si $4|x| < 1$, la série converge et si $4|x| > 1$, la série diverge. Le rayon est $R = \frac{1}{4}$.

3-b S est une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) d'après **2.**

3-c En comparant avec les solutions trouvées à la question **1**, on peut trouver l'expression de $S(x)$. En effet, comme $S(0) = -1$, $K = -1$ et $S(x) = -\sqrt{1+4x}$.

Remarque :

On peut remontrer que S est bien solution de (E) en procédant à l'envers.

On travaille pour $x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$. Posons $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n$.

On sait que y est dérivable et que l'on peut dériver sous le signe $\sum$ à l'intérieur du domaine de convergence.

$y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(2n+2)!}{(2n+1)[(n+1)!]^2} x^n$.

Puis la quantité $(1+4x)y'(x)-2y(x)$ vaut : (On regroupe tous les termes en x^n pour tout $n \geqslant 1$.)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(2n+2)!}{(2n+1)[(n+1)!]^2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n n(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n (2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n.$$

Il reste : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}\left[-2+\frac{4n-2}{2n-1}\right] x^n + (-1)2! + 2 = 0.$

Donc on a : (E) $(1+4x)y'(x)-2y(x)=0$.

Exercice 02

1. Montrons que pour $a>0$ fixé, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ converge.

Comme $\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, (On utilise classiquement un théorème de comparaison et le fait que $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, où $a>0$.) $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue (donc par morceaux) sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$ fixé et est donc intégrable sur $[a,+\infty[$, pour $a>0$.

2. • Pour $x=0$, $f(t) \sim \frac{1}{t}$, et comme l'intégrale sur $]0,1]$ de cette dernière fonction diverge, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$. On en déduit que F n'est pas définie en 0 et par extension ne peut pas être définie pour $x<0$.

Donc : $D_F =]0,+\infty[$.

• Pour $x>0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt$.

L'application $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_F (car f est continue sur cet ensemble). Donc : $\forall x>0$, $F'(x) = -f(x) = -\dfrac{\sin x}{x^2}$.

3. • Montrons à l'aide d'une intégration par parties, que $F(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} - 2\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,dt$.

Soit $u>x>0$:

$$\int_x^u \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t^2}\right]_x^u - 2\int_x^u \frac{\cos t}{t^3}\,dt.$$

Le but du jeu est d'augmenter le degré du dénominateur dans l'intégrale.

Puis u tend vers $+\infty$: $F(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} - 2\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,dt$.

• En refaisant ensuite une intégration par parties sur cette dernière intégrale, montrons :

$$F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

quand $x \to +\infty$.

Il faut montrer que l'intégrale du second membre est $o(1/x^2)$. Croyez moi si vous voulez mais la majoration directe est trop forte. Il faut refaire une *I.P.P.* Une nouvelle *I.P.P* monte encore le degré du dénominateur et c'est ce que l'on veut !

On a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,dt = -\frac{\sin x}{x^3} + 3\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4}\,dt.$$

On majore en valeur absolue la dernière intégrale par $\displaystyle\int_x^{+\infty} 3t^{-4}\,dt = x^{-3}$.

Le second membre de la nouvelle égalité est bien un $o(1/x^2)$.

4. Montrons que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

La fonction g est bien continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 car $g(t) = -\frac{t}{6} + o(t)$.

5. • On note encore g le prolongement par continuité de g sur $[0,1]$. On peut justifier que $\displaystyle\int_x^1 g(t)\,dt$ tend vers la constante $K = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ car g est continue sur $[0,1]$. Et donc $\displaystyle\int_x^1 g(t)\,dt$ tend vers la constante $K = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$.

• Déterminons : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt - (-\ln x)$.

On a :

$$\int_x^1 g(t)\,dt = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt - \int_x^1 \frac{dt}{t} = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt - (-\ln x).$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt - (-\ln x) = K$.

Ainsi, $F(x) - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt - (-\ln x)$ tend vers K quand $x \to 0^+$ et en divisant par $-\ln x$, le rapport $\dfrac{F(x)}{(-\ln x)}$ tend vers 1 lorsque $x \to 0^+$ et $F(x) \sim -\ln x$.

Exercice 03

1. On pose $I =]-1,1[$. Déterminons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.

Déterminons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ en posant $F(t) = \dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)}$

$a = [F(t)t]_{t=0} = \left[\dfrac{2-4t^2}{t^2-1}\right]_{t=0} = -2$, $b = [F(t)(t-1)]_{t=1} = \left[\dfrac{2-4t^2}{t(t+1)}\right]_{t=0} = -1$.

Et enfin : $c = [F(t)(t+1)]_{t=-1} = \left[\dfrac{2-4t^2}{t(t-1)}\right]_{t=-1} = -1$.

2. Déterminons $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{t^2(1-t^2)} = \dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t^2} + \dfrac{\gamma}{1-t} + \dfrac{\delta}{1+t}$.

On pose :

$$H(t) = \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\gamma}{1-t} + \frac{\delta}{1+t}.$$

On a : $\beta = \left[t^2 H(t)\right]_{t=0} = \left[\dfrac{1}{1-t^2}\right]_{t=0} = 1$ puis $\gamma = [H(t)(1-t)]_{t=1} = \left[\dfrac{1}{t^2(1+t)}\right]_{t=1} = \dfrac{1}{2}$

puis $\delta = [H(t)(1+t)]_{t=-1} = \left[\dfrac{1}{t^2(1-t)}\right]_{t=-1} = \dfrac{1}{2}$ et enfin $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} tH(t) = 0 = \alpha - \gamma + \delta \Rightarrow \alpha = 0$.

3. On considère l'équation différentielle, définie sur $I \setminus \{0\}$, par :

$$(F) \quad Z'(t) + \frac{4t^2-2}{t(t^2-1)} Z(t) = 0.$$

On cherche une primitive de $t \mapsto \dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)}$.

Il est temps d'utiliser notre décomposition en éléments simples. On cherche donc une primitive de :

$$t \mapsto \frac{-2}{t} + \frac{-1}{t-1} + \frac{-1}{t+1}.$$

Rapidement, on trouve $t \mapsto \ln\left|\dfrac{1}{t^2(t^2-1)}\right|$ pour $t \in I \setminus \{0\}$. Et les solutions Z de (F) sont :

$$t \mapsto \lambda \exp\left(\ln\left|\frac{1}{t^2(t^2-1)}\right|\right) = \lambda \left|\frac{1}{t^2(t^2-1)}\right| = \frac{\lambda}{t^2(1-t^2)}.$$

4-a On pose : $\forall t \in I,\ y(t) = t\,z(t)$.
On a, pour tout $t \in I$, $y'(t) = z(t) + t\,z'(t)$ et $y''(t) = 2\,z'(t) + t\,z''(t)$.

On remplace dans (E). On obtient :

$$(t^2-1)\,(2z'(t) + tz''(t)) + 2t\,(z(t) + tz'(t)) - 2tz(t) = 0.$$

Ce qui donne : $t(t^2-1)z''(t) + (4t^2-2)z'(t) = 0$.

4-b Si l'on pose $z'(t) = Z(t)$, (E) est ramené à (F) que l'on a résout à **3.** Ici $Z(t) = \dfrac{K}{t^2(1-t^2)}$. Il reste à intégrer Z. Pour cela, on utilise la décomposition en éléments simples de **2.**
Pour tout $t \in I \setminus \{0\}$, $Z(t) = \dfrac{\lambda}{t^2} + \dfrac{\lambda}{2}\left(\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}\right)$.
Et donc :

$$\forall t \in I \setminus \{0\},\ z : t \mapsto -\frac{\lambda}{t} + \frac{\lambda}{2}.\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \mu,\ \text{où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Il reste à multiplier par t : $\forall t \in I \setminus \{0\},\ y : t \mapsto -\lambda + \dfrac{\lambda}{2}t\,\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) + \mu\,t$, où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
On peut remarquer que y est prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = -\lambda$.
On pose $y(0) = -\lambda$ et on note toujours y ce prolongement. La fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. On a ainsi l'ensemble $\mathcal{S}_E(]-1,1[)$ des solutions de (E) sur $I =]-1,1[$ qui forme un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\left(t \mapsto t,\ t \mapsto -1 + \dfrac{t}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)\right)$.

$$\mathcal{S}_E(]-1,1[) = \left\{t \mapsto -\lambda + \frac{\lambda}{2}t\,\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \mu\,t,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 04

On pose $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et pour tout $(f,g) \in E^2$,

$$\langle f,\, g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Enfin, pour tout $i \in [\![0,3]\!]$, on pose : $P_i(x) = x^i$.
1. On commence à vérifier que $\langle f,\, g\rangle = \langle g,\, f\rangle$.
Puis si f, g et h sont trois fonctions de E et $a \in \mathbb{R}$,

$$\langle f,\, g+ah\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)(g(x)+ah(x))\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx + a\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx = \langle f,\, g\rangle + a\langle f,\, h\rangle.$$

Puis $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(f(x))^2\,dx \geqslant 0$. Et si $\displaystyle\int_{-1}^{1}(f(x))^2\,dx = 0$ alors comme f^2 est continue et à valeurs positives, elle est nulle sur $[-1,1]$ donc est la fonction nulle sur $[-1,1]$.
2. La famille (P_0, P_1, P_2) est libre car ce sont des polynômes tous de degré différents mais comme $\langle P_0,\, P_2\rangle = 1/3 \neq 0$, cette famille n'est pas orthogonale.
3. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, trouvons une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2). On pose : $\left\{\begin{array}{lcc} Q_0 & = & P_0 \\ Q_1 & = & P_1 + aQ_0 \\ Q_2 & = & P_2 + bQ_0 + cQ_1 \end{array}\right.$.

$$\langle Q_0,\, Q_1\rangle = \langle Q_0,\, P_1\rangle + a\langle Q_0,\, Q_0\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx + \frac{a}{2}\int_{-1}^{1} 1^2\,dx = 0.$$

On en déduit $a = 0$ et $Q_1 = P_1$. Donc P_0 et P_1 sont orthogonaux.

$$\langle Q_0,\, Q_2\rangle = \langle Q_0,\, P_2 + bQ_0 + cQ_1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2 + b + cx)\,dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + b = 0.$$

$$\langle Q_1,\, Q_2\rangle = \langle P_1,\, P_2 + bQ_0 + cQ_1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^3 + bx + cx^2)\,dx = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Ainsi : $Q_2 = P_2 - \dfrac{1}{3}$.

Il reste à normer les vecteurs et la base orthonormée s'appellera (W_0, W_1, W_2).

$$\langle Q_0,\, Q_0\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1^2\, dx = 1 \Rightarrow W_0 : x \mapsto 1.$$

$$\langle Q_1,\, Q_1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{3} \Rightarrow W_1 : x \mapsto x\sqrt{3}.$$

$$\langle Q_2,\, Q_2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4\, dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2}{3}x^2\, dx = \frac{4}{45}.$$

Et donc $W_2 = \sqrt{\dfrac{45}{4}}\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right)$.

4. La projection orthogonale R de P_3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$R = \langle P_3,\, W_0\rangle W_0 + \langle P_3,\, W_1\rangle W_1 + \langle P_3,\, W_2\rangle W_2.$$

Or, $\langle P_3,\, W_0\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$.

Puis : $\langle P_3,\, W_1\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{3}x^4\, dx = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Enfin : $\langle P_3,\, W_2\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{3\sqrt{5}}{2}\left(x^5 - \dfrac{1}{3}x^3\right) dx = 0$.

Il reste : $R = \langle P_3,\, W_1\rangle W_1$. Et donc $R : x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}}{5}\sqrt{3}x = \dfrac{3}{5}x$.

5. Le carré de la distance de P_3 à $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$\|P_3\|^2 - \|R\|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^6\, dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{9}{25}x^2\, dx = \frac{1}{7} - \frac{9}{25} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{7 \times 25}.$$

Et donc la distance d cherchée est : $\dfrac{2}{5\sqrt{7}}$.