Devoir surveillé N°04

2TSI-MATHÉMATIQUES

Samedi 27 Janvier 2024

Les différents exercices sont indépendants.

Exercice 01

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ (1+4x)y'(x) - 2y(x) = 0.$$

1. Résoudre (E).
2. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
3. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n(2n)!}{(2n-1)(n!)^2}x^n$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série.
   (b) Montrer que sa somme S est une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $]-R,\, R[$.
   (c) En comparant avec les solutions trouvées à la question **1**, trouver l'expression de $S(x)$.

Exercice 02

1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$ converge.
2. En déduire le domaine de définition de $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$ puis sa dérivée.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $F(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} - 2\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\, dt$.
   En refaisant ensuite une intégration par parties sur cette dernière intégrale, montrer :
   $$F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
   quand $x \to +\infty$.
4. Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.
5. On note encore g le prolongement par continuité de g sur $[0, 1]$. Justifier que $\displaystyle\int_x^1 g(t)\, dt$ tend vers la constante $K = \displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt$.
   Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt - (-\ln x)$ et en déduire que $F(x) \sim_{0^+} -\ln x$.

Exercice 03

On pose $I =]-1, 1[$.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{2-4t^2}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.
2. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, $\forall t \in I \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{t^2(1-t^2)} = \dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t^2} + \dfrac{\gamma}{1-t} + \dfrac{\delta}{1+t}$.

3. On considère l'équation différentielle, définie sur $I \setminus \{0\}$, par :

$$(F) \quad Z'(t) + \frac{4t^2 - 2}{t(t^2 - 1)} Z(t) = 0.$$

   Résoudre (F).

4. On considère l'équation différentielle, définie sur I par :

$$(E) \ (t^2 - 1)y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = 0.$$

   (a) On pose : $\forall t \in I,\ y(t) = t\,z(t)$. Écrire l'équation différentielle (E') vérifiée sur I par z.

   (b) En utilisant la résolution de (F) déterminer toutes les solutions de (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 04

On pose $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et pour tout $(f, g) \in E^2$,

$$\langle f,\, g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Enfin, pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$, on pose : $P_i(x) = x^i$.

1. Montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Justifier que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.
3. On utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).
4. En déduire la projection orthogonale R de P_3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la distance de P_3 à $\mathbb{R}_2[X]$.