TSI2. Concours Blanc 2024

Épreuve de Mathématiques

Duré 4 heures. Les calculatrices sont interdites

La rigueur du raisonnement et la clarté seront prises en compte dans la notation. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené àÂ prendre.
Instructions propre à cette épreuve : elle possède quatre problèmes indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 01

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   (b) Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   En déduire une relation entre $(\operatorname{ch} t)^2$ et $(\operatorname{sh} t)^2$.
2. Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh.
   On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. (a) Montrer que l'équation $\operatorname{sh} t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.
   (b) On pose $z = e^\alpha$. Calculer $z^2 - 2z - 1$.
   (c) En déduire la valeur exacte de α.
   (d) Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$
4. Déterminer $\operatorname{ch} \alpha$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{2n}\, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $t \in [0, \alpha]$, on a : $0 \leqslant \operatorname{sh} t \leqslant 1$.
   Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle est convergente.
3. (a) Montrer en remarquant que $\operatorname{sh}^{2n+2} t = \operatorname{sh}^{2n+1} t \operatorname{sh} t$ et avec une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \operatorname{ch} \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

(c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Problème 02

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
On note $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire identité.
On se donne l'application linéaire $s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$s(e_1) = e_3,\ s(e_2) = e_4,\ s(e_3) = e_1,\ s(e_4) = e_2$$

et l'application linéaire p définie par $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$.

1. L'objectif de cette question est d'étudier s.
   (a) Donner la matrice S de s dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Prouver que S est diagonalisable (sans calculer son polynôme caractéristique).
   (c) Calculer S^2. Que peut-on en déduire sur s ?
   (d) Calculer le polynôme caractéristique de S.
   (e) Montrer que S admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2 et que l'on choisira telle que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
   (f) On note E_1 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_1. Donner une base (u_1, u_2) de E_1, telle que les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 soient égales à 0, 1 ou -1.
   (g) On note E_2 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_2. Donner une base (u_3, u_4) de E_2, telle que les coordonnées des vecteurs u_3 et u_4 soient égales à 0 ou 1.
   (h) Trouver une matrice D_1 diagonale et une matrice inversible Q_1 telles que $S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$.
   (i) Calculer Q_1^{-1}.
2. L'objectif de cette question est d'étudier p.
   (a) Donner la matrice P de p dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Calculer $p \circ p$. Que peut-on en déduire sur p ?
   (c) Calculer $p(u_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ en fonction des vecteurs u_i.
   (d) Montrer que l'application linéaire p est diagonalisable.
   (e) Trouver une matrice diagonale D_2 et une matrice inversible Q_2 telles que $P = Q_2 D_2 Q_2^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_2^{-1}.
3. On considère maintenant l'application linéaire $f = 3s + 4p$
   (a) Donner la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Expliciter une matrice D_3 diagonale et une matrice inversible Q_3 telles que $F = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$.

Problème 03

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. On lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule tombe dans une case donnée est $\dfrac{1}{N}$. Une case peut contenir éventuellement toutes les boules.
On note T_n le nombre de cases **non vides** à l'issue des n lancers.
On pose pour tout k entier compris entre 1 et N et pour tout j entier compris entre 1 et n, l'événement $C_{j,k}$: « la $j^{\text{ème}}$ boule tombe dans la case numéro k ».

1. Déterminer (en fonction de n et N) les valeurs prises par la variable T_n.
   (On distinguera 2 cas : $n \leqslant N$ et $n > N$).
2. Donner la loi de T_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi de T_2.
   Indication : on commencera par le cas $N = 1$ puis pour le cas $N \geqslant 2$, on remarquera que l'on a l'égalité $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\left(C_{1,i} \cap C_{2,i}\right)$.
   En déduire $E(T_2)$ en fonction de N.
4. On se fixe maintenant $n \geqslant 2$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(T_n = 1\right)$.
   (b) Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d}$ puis calculer $\mathbb{P}\left(T_n = 2\right)$ pour $N = 1$ puis pour $N \geqslant 2$.
   (c) On désire calculer $\mathbb{P}(T_n = n)$.
      i. Que se passe t-il pour $N < n$?
      ii. On suppose ici $N \geqslant n$. Montrer que :
      $$\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N + 1 - n}{N} \mathbb{P}(T_{n-1} = n - 1).$$
      En déduire alors $\mathbb{P}(T_n = n)$ en fonction de n et de N.
5. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$,
   $$\mathbb{P}\left(T_{n+1} = k\right) = \frac{k}{N}\mathbb{P}\left(T_n = k\right) + \frac{N - k + 1}{N}\mathbb{P}\left(T_n = k - 1\right). \quad (\star\star)$$
6. On note G_n la fonction génératrice de la variable T_n, c'est-à-dire la fonction qui à x réel associe la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} P(T_n = k)x^k$, quand elle existe.
   (a) Montrer qu'ici, la fonction G_n est définie sur tout $\mathbb{R}$.
   (b) Donner un lien entre $G_n'(x_0)$ et $\mathbb{E}\left[T_n\right]$, où x_0 est un réel à déterminer.
   (c) En utilisant l'équation $(\star\star)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$G_{n+1}\left(x\right) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'\left(x\right) + xG_n\left(x\right).$$

(d) En déduire que $\mathbb{E}[T_{n+1}] = \left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}[T_n]+1$ puis que $\mathbb{E}[T_n] = N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$.

7. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i le numéro de la case dans laquelle la $i^{\text{ème}}$ boule tombe.
Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, on note Y_k le nombre de boules que contient la case numéro k, et Z_k la variable valant 0 si la boite k est vide, et 1 si la boite k contient au moins une boule.
Enfin, on note $\mathbb{I}_A$ la fonction indicatrice de A, c'est-à-dire telle que $\mathbb{I}_A(x) = 1$ pour $x \in A$ et $\mathbb{I}_A(x) = 0$ pour $x \notin A$.
   (a) Exprimer Y_k à l'aide des fonctions indicatrices $\mathbb{I}_{\{X_i=k\}}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.
   (b) En déduire la loi de Y_k, puis celle de Z_k.
   (c) Les variables aléatoires $(Z_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
   (d) Exprimer T_n en fonction des variables aléatoires $(Z_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ et retrouver ainsi l'expression de $\mathbb{E}[T_n]$.

Problème 04

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le carré défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x+y| \leqslant 2 \text{ et } |x-y| \leqslant 2\right\}.$$

On s'intéresse à la fonction de deux variables $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) - x.$$

1. On s'intéresse tout d'abord à la nature de l'ensemble $\mathcal{D}$.
   (a) Tracer dans le plan $\mathbb{R}^2$ les quatre droites d'équations $x+y=2$, $x+y=-2$, $x-y=2$ et $x-y=-2$. Sur la même figure, indiquer l'ensemble $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que si (x,y) appartient à $\mathcal{D}$ alors $(x,-y)$ appartient encore à $\mathcal{D}$.
   Quelle symétrie possède l'ensemble $\mathcal{D}$?
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ possède une symétrie centrale que l'on déterminera.
   (d) Rappeler la définition d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et d'une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
   Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble $\mathcal{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes.
3. Dans cette question, on étudie la fonction f définie sur l'ensemble $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathcal{O} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x+y| < 2 \text{ et } |x-y| < 2\right\}$.
   (a) Déterminer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y)$ en tout point (x,y) de $\mathcal{O}$.
   (b) Déterminer l'unique point critique de la fonction f dans $\mathcal{O}$.
   (c) Sans calculer les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, montrer qu'elles sont néanmoins égales pour tout $(x,y) \in \mathcal{O}$.
   (d) Pour $(x,y) \in \mathcal{O}$, donner une expression des dérivées partielles secondes notées

$$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

   (e) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $u \longmapsto \ln(1+u)$.
   (f) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $t \longmapsto f(1+t) - f(1,0)$ au voisinage de 0. Le point critique de f est-il un extremum local de f ?