Probleme 01

Partie A – Étude de fonctions

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a
$$\mathrm{ch}\,(-t) = \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = \mathrm{ch}\,(t)$$
et
$$\mathrm{sh}\,(-t) = \frac{e^{-t}-e^{t}}{2} = -\frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = -\mathrm{sh}\,(t).$$
Ainsi la fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.

   (b) Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par somme de fonctions dérivables, les fonctions ch et sh le sont. On a donc pour $t \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{ch}\,'(t) = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = \mathrm{sh}\,(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,'(t) = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = \mathrm{ch}\,(t).$$

   (c) La fonction f est une somme de puissances de fonctions dérivables (d'après la question précédente) et f est donc dérivable. On déduit de la question précédente que pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$f'(t) = 2\mathrm{sh}\,(t)\mathrm{ch}\,(t) - 2\mathrm{ch}\,(t)\mathrm{sh}\,(t) = 0.$$
La fonction f est donc constante égale à $f(0) = 1$ car
$$\mathrm{ch}\,(0) = \frac{e^{0}+e^{0}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(0) = \frac{e^{0}-e^{0}}{2} = 0.$$
On déduit de la discussion précédente que pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{ch}\,(t)^2 - \mathrm{sh}\,(t)^2 = 1.$$

2. On a déjà remarqué que
$$\mathrm{ch}\,(0) = \frac{e^{0}+e^{0}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(0) = \frac{e^{0}-e^{0}}{2} = 0.$$
Par ailleurs, $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$. Par composition et somme de limites on en déduit que
$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{ch}\,(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \mathrm{ch}\,(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = +\infty$$
et que
$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{sh}\,(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \mathrm{sh}\,(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = +\infty$$
La fonction exponentielle étant toujours strictement positive, on en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\,'(t) = \mathrm{ch}\,(t) > 0$ et donc que la fonction sh est toujours strictement croissante.
On en déduit que $\mathrm{sh}\,(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$ et que $\mathrm{sh}\,(t) > 0$ si et seulement si $t > 0$. Comme $\mathrm{ch}\,' = \mathrm{sh}$, on en déduit le tableau.

3. (a) On sait que $\mathrm{sh}\,(0) = 0$ et que
$$\mathrm{sh}\,(\ln(10)) = \frac{e^{\ln 10} - e^{-\ln 10}}{2} = \frac{10 - \frac{1}{10}}{2} = \frac{99}{20} > \frac{80}{20} = 4.$$
Or la fonction sh est continue sur $[0, \ln(10)]$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$), elle est strictement monotone sur $[0, +\infty[$ et donc sur $[0, \ln(10)]$ et $1 \in [0, 4] \subset [0, \mathrm{sh}\,(\ln 10)]$. Donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique $\alpha \in [0, \ln(10)]$ tel qu $\mathrm{sh}\,(\alpha) = 1$.

(b) On sait que $z = e^{\alpha} > 0$ et que $\operatorname{sh}(\alpha) = 1$. On a donc

$$1 = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 - 1}{2z}.$$

C'est-à-dire en multipliant par $2z$:

$$2z = z^2 - 1$$

ce qui est équivalent à

$$z^2 - 2z - 1 = 0.$$

(c) Le polynôme $X^2 - 2X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ et pour racines

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et } x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Comme $\sqrt{2} \geqslant 1$, on en déduit que $1 - \sqrt{2} \leqslant 0$ et que

$$z = 1 + \sqrt{2}$$

car on sait que $z = e^{\alpha} > 0$. On conclut enfin que

$$\alpha = \ln(z) = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

(d) On a déjà montré que $\alpha \geqslant 0$. Il suffit donc de montrer que $\alpha \leqslant 1$.
Comme la fonction exponetielle est croissante, il suffit de montrer que $z = e^{\alpha} \leqslant e^1 = e \approx 2,72$.
Or $\sqrt{2} < 1,5$ donc $z = 1 + \sqrt{2} \leqslant 2,5 < e$. On a donc bien

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

4. On sait que $\operatorname{sh}(\alpha) = 1$. Donc on a

$$(\operatorname{ch} \alpha)^2 = 1 + (\operatorname{sh} \alpha)^2 = 1 + 1 = 2$$

d'après une question précédente. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t \geqslant 1 > 0$, on en déduit

$$\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{2}.$$

Autre approche :
On note, comme précédemment, $z = e^{\alpha}$. On calcule alors :

$$\operatorname{ch}(\alpha) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{2z + 2}{2z} = \frac{z + 1}{z}$$

car $z^2 = 2z + 1$. On en déduit alors

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{z + 1}{z} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = \sqrt{2}.$$

Partie B – Suite d'intégrales

Les fonctions $t \longmapsto (\operatorname{sh} t)^{2n}$ sont continues sur $[0, \alpha]$ pour tout entier positif n car ce sont des puissances de la fonction dérivable et donc continue sh (Partie A).

1. Un calcul direct donne :
$$I_0 = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^0 \, dt = \int_0^\alpha 1 \, dt = \alpha.$$
On veut calculer ensuite $I_1 = \displaystyle\int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^2 \, dt$.
$$I_1 = \int_0^\alpha \left(\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^\alpha \left(e^t - e^{-t}\right)^2 dt.$$
Puis on a : $\left(e^t - e^{-t}\right)^2 = e^{2t} + e^{-2t} - 2$.
$$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^\alpha \left(e^{2t} + e^{-2t} - 2\right) dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t\right]_0^\alpha.$$
On développe.
$$I_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha} - \frac{1}{2}e^{-2\alpha} - 2\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right).$$
Or e^α est solution de $z^2 = 2z + 1$ et donc :
$$e^{2\alpha} = 2e^\alpha + 1.$$
Par ailleurs, $1 = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z^2} \Rightarrow \dfrac{1}{z^2} = 1 - \dfrac{2}{z}$. On a alors :
$$e^{-2\alpha} = 1 - 2e^{-\alpha}.$$
Finalement :
$$I_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha} - \frac{1}{2}e^{-2\alpha} - 2\alpha\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(2e^\alpha + 1\right) - \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-\alpha}\right) - 2\alpha\right).$$
On développe et on arrange.
$$I_1 = \frac{1}{8}\left(2e^\alpha + 1 - 1 + 2e^{-\alpha}\right) - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{ch}\alpha - \frac{\alpha}{2}.$$
Or $\operatorname{ch}\alpha = \sqrt{2}$ et $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$.
$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2}).$$

2. On sait d'après la partie A que la fonction sh est (strictement) croissante et que $\operatorname{sh}(0) = 0$ ainsi que $\operatorname{sh}(\alpha) = 1$. On en déduit donc
$$\forall t \in [0, \alpha], \qquad 0 < \operatorname{sh} t \leqslant 1.$$
On a donc pour tout entier $k \geqslant 1$
$$\forall t \in [0, \alpha], \qquad 0 \leqslant (\operatorname{sh} t)^k \leqslant (\operatorname{sh} t)^{k-1};$$
et donc
$$\forall t \in [0, \alpha], \qquad 0 \leqslant (\operatorname{sh} t)^{2n} \leq (\operatorname{sh} t)^{2n-1} \leqslant (\operatorname{sh} t)^{2(n-1)}.$$
Ainsi en intégrant sur $[0, \alpha]$, on obtient pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$0 \leq I_n = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{2n}\, dt \leqslant \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{2(n-1)}\, dt = I_{n-1}.$$
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; on en déduit qu'elle est convergente.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En sachant que $\operatorname{sh}(0) = 0$ et $\operatorname{sh}(\alpha) = 1$, une intégration par partie donne :
$$\begin{aligned} I_{n+1} = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{2n+2} dt &= \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{2n+1} \operatorname{sh} t dt \\ &= \left[(\operatorname{sh} t)^{2n+1} \operatorname{ch} t\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n+1)(\operatorname{ch} t)^2 (\operatorname{sh} t)^{2n} dt \\ &= \operatorname{ch} \alpha - (2n+1) \int_0^\alpha (1 + (\operatorname{sh} t)^2)(\operatorname{sh} t)^{2n} dt \\ &\operatorname{ch} \alpha - (2n+1)(I_n + I_{n+1}). \end{aligned}$$
On a bien montré que pour $n \in \mathbb{N}$:
$$I_{n+1} = \operatorname{ch} \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n).$$
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question précédente que
$$I_{n+1} = \operatorname{ch} \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n) = I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$$
car on a montré en A-4 que $\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{2}$. On en déduit, en faisant passer du même coté de l'égalité les termes en I_{n+1}, que
$$(2n+2) I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1) I_n.$$
Ce qui permet de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$
(c) On sait d'après la question B-2 que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on note l. D'après la question précédente, pour tout entier positif n
$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$
Il s'agit pour déterminer l de passer à la limite dans cette relation. On sait que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = l$ et que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n+2} = 0 \quad \text{et} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

En passant à la limite dans la relation de récurrence ci-dessus, on obtient donc

$$l = -l$$

et donc

$$l = 0.$$

Ainsi on a $\lim_{n\to+\infty} I_n = l = 0$.

Probleme 02

1. L'objectif de cette question est d'étudier s.
   (a) La matrice d'une application linéaire dans une base est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs coordonnées (dans la base) des images des vecteurs de la base. Ici, on a d'après l'énoncé :
   $$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) La matrice S est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable (théorème spectrale).
   (c) Une multiplication matricielle donne
   $$S^2 = I_4 = I,$$
   où $I = I_4$ est la matrice identité de $M_4(\mathbb{R})$. On en déduit que $s^2 = s \circ s = Id$ et que s est une symétrie.
   (d) On calcule le polynôme $\chi_S(X)$ caractéristique de S en développant sur la première colonne
   $$\chi_S(X) = \mathsf{Det}\,(XI - S) = (-1)^4\mathsf{Det}\,(M - XI) = \mathsf{Det}\,(M - XI)$$
   $$= \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -X & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -X \end{vmatrix}$$
   $$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-X^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X^2 \\ 1 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -X \end{vmatrix}$$
   $$= \begin{vmatrix} 0 & 1-X^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X^2 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X^2 & 0 \\ 0 & 1-X^2 \end{vmatrix}$$
   $$= (1-X^2)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$$
   Ainsi le polynôme caractéristique de S vaut :
   $$\chi_S(X) = (X-1)^2(X+1)^2.$$

(e) Les valeur propres de S sont les racines du polynôme caractéristique

$$\chi_S(X) = (X-1)^2(X+1)^2.$$

Les valeurs propres de S sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ qui sont toutes deux de multiplicités 2 car les deux racines de $\chi_S(X)$ sont de multiplicité 2.

(f) L'espace propre E_1 est l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$s(u) = \lambda_1 u = -u;$$

ce sous-espace vectoriel est au plus de dimension 2 car la multiplicité de λ_1 est 2.
On remarque que pour $u_1 = e_1 - e_3$ on a

$$s(u_1) = s(e_1 - e_3) = s(e_1) - s(e_3) = e_3 - e_1 = -u_1$$

et que pour $u_2 = e_2 - e_4$ on a aussi

$$s(u_2) = s(e_2) - s(e_4) = e_4 - e_2 = -u_2.$$

Ainsi les vecteurs u_1 et u_2 ci-dessus qui sont non nuls sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre λ_1. Par ailleurs ces deux vecteurs sont non-colinéaires et forment donc une famille libre (u_1, u_2) de E_1.
Comme $\mathsf{dim}\,(E_1) \leqslant 2$, la famille (u_1, u_2) est une base de E_1. Les coordonnés de u_1 et u_2 dans la base $\mathscr{B}$ sont donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs u_1 et u_2 correspondent donc bien aux exigences de l'énoncé.
Autre méthode : On pourrait résoudre le système $SX = -X$ ce qui conduit à des calculs similaires et une réponse possible identique.

(g) L'espace propre E_2 est l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$s(u) = \lambda_2 u = u;$$

ce sous-espace vectoriel est au plus de dimension 2 car la multiplicité de λ_2 est 2.
On remarque, comme précédemment, que pour $u_3 = e_1 + e_3$ et pour $u_4 = e_2 + e_4$ on a

$$s(u_3) = s(e_1) + s(e_3) = e_3 + e_1 = u_3$$

et

$$s(u_4) = s(e_2) + s(e_4) = e_4 + e_2 = u_2.$$

Ainsi les vecteurs u_3 et u_4 ci-dessus qui sont non nuls sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre λ_2. Par ailleurs ces deux vecteurs sont non-colinéaires et forment donc une famille libre (u_3, u_4) de E_1.
Comme $\mathsf{dim}\,(E_2) \leqslant 2$, la famille (u_3, u_4) est une base de E_2. Les coordonnés de u_3 et u_4 dans la base $\mathscr{B}$ sont donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Et les vecteurs u_3 et u_4 correspondent donc bien aux exigences de l'énoncé.

Autre méthode : On pourrait résoudre le système $SX = X$ ce qui conduit à des calculs similaires et une réponse possible identique.

(h) Les sous-espaces propre E_1 et E_2 étant associés à des valeurs propres distinctes, ils sont en somme directe et la famille de vecteur (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ car (u_1, u_2) est libre dans E_1 et (u_3, u_4) est libre dans E_2. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) étant libre à 4 éléments dans $\mathbb{R}^4$ de dimension 4, c'est une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.

Les deux questions précédentes assurent que

$$s(u_1) = -u_1, \quad s(u_2) = -u_2, \quad s(u_3) = u_3, \quad s(u_4) = u_4$$

et donc que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(s) = D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $Q = Q_1$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$,

$$Q = Q_1 =_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}() = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a par la formule du changement de base

$$S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}.$$

2. L'objectif de cette question est d'étudier p.

(a) En suivant la définition donnée en 1a, on calcule les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ par p :

$$\begin{aligned} p(e_1) &= \frac{1}{2}(e_1 - s(e_1)) = \frac{1}{2}(e_1 - e_3) \\ p(e_2) &= \frac{1}{2}(e_2 - s(e_2)) = \frac{1}{2}(e_2 - e_4) \\ p(e_3) &= \frac{1}{2}(e_3 - s(e_3)) = \frac{1}{2}(e_3 - e_1) \\ p(e_4) &= \frac{1}{2}(e_4 - s(e_4)) = \frac{1}{2}(e_4 - e_2). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On a montré à la question 1c que $s^2 = s \circ s =$. On calcule alors

$$p \circ p = \frac{1}{4}(-s) \circ (-s) = \frac{1}{4}(-s - s + s \circ s) = \frac{1}{4}(2 - 2s) = \frac{1}{2}(-s) = p.$$

Ainsi $p \circ p = p$ et p est un projecteur.

(c) On rappelle que d'après les questions 1e, 1f et 1g les vecteurs u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ et que les vecteurs u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre $\lambda_2 = 1$. On a donc

$$\begin{aligned}
p(u_1) &= \frac{1}{2}(u_1 - s(u_1)) = \frac{1}{2}(u_1 + u_1) = u_1 \\
p(u_2) &= \frac{1}{2}(u_2 - s(u_2)) = \frac{1}{2}(u_2 + u_2) = u_2 \\
p(u_3) &= \frac{1}{2}(u_3 - s(u_3)) = \frac{1}{2}(e_3 - u_3) = 0 \\
p(u_4) &= \frac{1}{2}(u_4 - s(u_4)) = \frac{1}{2}(u_4 - u_4) = 0.
\end{aligned}$$

(d) La famille de vecteurs $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (voir question 1h). La question précédente assure que les vecteurs u_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (qui sont non nuls) sont des vecteurs propres de p : u_1 et u_2 sont associés à la valeur propre 1 et u_3 et u_4 sont associés à la valeur propre 0.

L'endomorphisme p admet donc une base de vecteurs propres et est donc diagonalisable.

En particulier, dans la base $\mathscr{B}'$, on a

$$D_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) On notant comme à la question 1h,

$$Q_2 = Q_1 = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, on trouve par changement de base

$$P = Q_2 D_2 Q_2^{-1};$$

D_2 étant la matrice définie à la question précédente

$$D_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On considère maintenant l'application linéaire $f = 3s + 4p$

(a) Pour déterminer la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$, il suffit de travailler matricellement avec les matrices S et P de s et p dans la base $\mathscr{B}$. On obtient ainsi

$$F = 3S + 4P = 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) On sait d'après 1h que

$$S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$$

avec

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a montré à la question 2e que

$$P = Q_1 D_2 Q_1^{-1}$$

avec

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{et } Q_1 = Q_2).$$

De là, on calcule :

$$F = 3S + 4P = 3Q_1 D_1 Q_1^{-1} + 4Q_1 D_2 Q_1^{-1} = Q_1 (3D_1 + 4D_2) Q_1^{-1} = Q_1 D_3 Q_1^{-1}$$

avec D_3 la matrice digonale

$$D_3 = 3D_1 + 4D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et aussi } Q_3 = Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probleme 03

1. Si le nombre de boules est inférieur ou égal au nombre de cases, deux configurations extrêmes sont possibles : une seule case est non vide, et elle contient les n boules, ou les n boules sont tombées dans des cases différentes, donc il y a n cases non vides, et il ne peut y en avoir davantage. Toutes les configurations intermédiaires sont possibles.

   $$\boxed{\text{Si } n \leqslant N, \text{ alors } T_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

   Si le nombre de boules est strictement supérieur au nombre de cases, les deux configurations extrêmes sont : une seule case contient toutes les boules, ou toutes les cases contiennent au moins une boule (ce qui est possible puisque $n > N$).

   $$\boxed{\text{Si } n > N, \text{ alors } T_n(\Omega) = [\![1, N]\!].}$$

2. Ici $n = 1$.
   Ici, $N \geqslant n$ et $T_1(\Omega) = \{1\}$. Il est certain qu'il y aura exactement une case contenant l'unique boule, donc $\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$ On en déduit que $\mathbb{E}[T_1] = 1 \times \mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$.

   $$\boxed{T_1(\Omega) = \{1\} \text{ et } \mathbb{P}(T_1 = 1) = 1\,;\, \mathbb{E}[T_1] = 1.}$$

3. Ici $n = 2$.
   Si $N = 1$, alors les deux boules tombent dans l'unique urne, donc $T_2(\Omega) = \{1\}$, $\mathbb{P}(T_2 = 1) = 1$ et $\mathbb{E}[T_2] = 1$.
   Si $N \geq 2$, alors $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$. La variable aléatoire $U = T_2 - 1$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1)$. Mais $\{T_2 = 1\}$ est réalisé si l'un des événements (incompatibles) $C_{1,i} \cap C_{2,i}$ est réalisé ($1 \leq i \leq N$), où $C_{1,i}$ (respectivement $C_{2,i}$) est l'événement : « la première (resp. deuxième) boule tombe dans la case numéro i ». Par indépendance des lancers :

   $$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(C_{1,i} \cap C_{2,i}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(C_{i,1})\,\mathbb{P}(C_{i,2}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$$

Donc $p = 1 - \dfrac{1}{N} = \dfrac{N-1}{N}$. On sait que $\mathbb{E}[U] = p$ et $\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[U] + 1$ donc $\mathbb{E}[T_2] = \dfrac{2N-1}{N}$.
On note que les cas $N = 1$ et $N \geqslant 2$ diffèrent par la valeur de $T_2(\Omega)$, mais dans les deux cas il est possible d'écrire :

$$\boxed{T_2(\Omega) \subset \{1, 2\}, \quad \mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}, \quad \mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}, \quad \mathbb{E}[T_2] = \frac{2N-1}{N}\ .}$$

4. (a) $[T_n = 1]$ signifie qu'au bout de n lancers, une seule case est non vide donc toutes boules sont dans la meme case. En notant $C_{j,k}$ l'événement « la $j^{\text{ème}}$ boule tombe dans la case numéro k », on a de manière analogue à un calcul précédent :

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(C_{1,i} \cap \ldots \cap C_{n,i}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(C_{i,1}) \ldots \mathbb{P}(C_{i,n}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}.}$$

(b) Si $N = 1$, l'événement $\{T_n = 2\}$ est impossible, donc de probabilité nulle.
Si $N \geqslant 2$, l'événement $\{T_n = 2\}$ est réalisé si l'un des $\binom{N}{2}$ événements incompatibles $K_{i,d} \cap K_{j,n-d}$ est réalisé, où $K_{r,d}$ est l'événement « r boules sont tombés dans la case numéro r » (avec $1 \leqslant i \neq j \leqslant N$ et $1 \leqslant d \leqslant n-1$). Il y a $\binom{n}{d}$ choix possibles pour les numéros de lancer mettant une boule dans la case i, les autres boules lancées allant dans la case j. Par incompatibilité et indépendance,

$$\mathbb{P}(K_{i,d} \cap K_{j,n-d}) = \sum_{d=1}^{n-1} \binom{n}{d} \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^n}\left(\sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d} - 2\right) = \frac{2^n - 2}{N^n}$$

et finalement $\mathbb{P}(T_n = 2) = \dbinom{N}{2} \dfrac{2^n - 2}{N^n}$.
En conclusion

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{N}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}}$$

avec la convention $\binom{N}{2} = 0$ si $N = 1$.

(c) i) Si $N < n$, l'évément $\{T_n = n\}$ est impossible, donc de probabilité nulle.
ii) Supposons $N \geqslant n$. Pour qu'au n-ième lancer n cases soient non vides, il faut qu'au lancer précédent $n-1$ cases soient non vides et que le dernier lancer atteigne une case vide. Dans cette configuration, il y a $N - (n-1)$ cases vides lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, donc, les cases pouvant être atteintes de manière équiprobable et par indépendance des lancers,

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N+1-n}{N} \mathbb{P}(T_{n-1} = n-1).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = n) &= \frac{(N+1-n)(N-(n-1))\ldots(N-1)}{N^{n-1}} \mathbb{P}(T_1 = 1) \\ &= \frac{N(N-1)\ldots(N-(n-1))}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!} \frac{1}{N^n}.\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{P(T_n = n) = \binom{N}{n} \frac{n!}{N^n}}$$

avec la convention $\dbinom{N}{n} = 0$ si $n > N$.

5. Les $\{T_n = i\}$, pour $1 \leqslant i \leqslant \min(n, N)$ forment un système complet d'événements car $T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]$ d'après la question 1.
On peut donc écrire :
$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{\min(n,N)} \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i)\, \mathbb{P}(T_n = i)\,.$$
Mais pour $i > k$ l'on a $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i) = 0$ car le nombre de cases non vides ne peut pas diminuer avec un lancer supplémentaire.
On a aussi $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i) = 0$ si $i < k - 1$ car le nombre de case non vides ne peut évoluer qu'au plus de 1 avec un lancer supplémentaire.
On a donc :
$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k)\, \mathbb{P}(T_n = k) + \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k - 1)\, \mathbb{P}(T_n = k - 1)\,.$$
Or $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k)$ est la probabilité que le nombre de cases non vides n'ait pas évolué, c'est-à-dire que la dernière boule lancée arrive dans l'une des k cases non vides parmi les N disponibles.
Par équiprobabilité : $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k) = \dfrac{k}{N}$.
De même, $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k - 1)$ est la probabilité que la dernière boule lancée arrive dans l'une des $N - (k - 1)$ cases encore vides, donc $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k - 1) = \dfrac{N - (k - 1)}{N}$.
On a bien établi que : :
$$\boxed{\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N}\mathbb{P}(T_n = k - 1).}$$

6.
   (a) Par définition, puisque $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$:
   $$\boxed{G_n(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k}$$
   la somme devant être limitée aux valeurs prises par T_n, qui sont ici en nombre fini d'après la question 1. Cette série entière est donc en fait une fonction polynomiale, donc
   la fonction G_n est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Notamment la fonction G_n est dérivable en $x = 1$ et
   $$\boxed{\mathbb{E}[T_n] = G'_n(1).}$$
   (c) On utilisera toujours une somme infinie pour l'expression de G_n, pour ne pas avoir à distinguer si $n \leqslant N$ ou non.
   D'après la relation $(\star\star)$, pour tout x réel :
   $$\begin{aligned} NG_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)\, x^k + N\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k - 1)\, x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} (k - 1)\, \mathbb{P}(T_n = k - 1)\, x^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)\, x^k + N\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k - 1)\, x^k - \sum_{k=2}^{+\infty} (k - 1)\, \mathbb{P}(T_n = k - 1)\, x^k \end{aligned}$$
   car $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$ donc
   $$\begin{aligned} NG_{n+1}(x) &= x\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)\, x^{k-1} + Nx\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k - x^2\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)\, x^{k-1} \\ &= xG'_n(x) + NxG_n(x) - x^2G'_n(x) \end{aligned}$$
   ce qui conduit bien à :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G'_n(x) + xG_n(x).}$$

(d) Par dérivation de la relation précédente, pour tout x réel :

$$G'_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(1-2x)\,G'_n(x) + \frac{1}{N}\left(x-x^2\right)G''_n(x) + G_n(x) + xG'_n(x).$$

En prenant $x=1$, sachant que $G_n(1)=1$, on obtient :

$$G'_{n+1}(1) = \left(1-\frac{1}{N}\right)G'_n(1)+1$$

donc, d'après le (b) :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[T_{n+1}\right] = \left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left[T_n\right]+1.}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique, le nombre $\ell = N$ vérifiant

$$\ell = \left(1-\frac{1}{N}\right)\ell + 1$$

et la suite de terme général $\mathbb{E}(T_n) - \ell$ est géométrique de raison $1-\frac{1}{N}$ et de premier terme $\mathbb{E}(T_1)-\ell = 1-N$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}(T_n) - N = \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}(1-N) = -N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

donc

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

7.

(a) La fonction indicatrice $\mathbb{I}_{\{X_i=k\}}$ vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule arrive dans la case numéro k et 0 sinon. On a alors

$$\boxed{Y_k = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{X_i=k\}}.}$$

(b) Les variables aléatoires $\mathbb{I}_{\{X_i=k\}}$ sont indépendantes (car les lancers sont indépendants) et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{N}$ (probabilité qu'une boule arrive dans l'urne k). On en déduit que Y_k suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{N}$:

$$\boxed{Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n;\frac{1}{N}\right).}$$

Autrement dit, si l'on appelle « succès » le fait qu'une boule arrive dans l'urne numéro k, la variable Y_k compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernouilli indépendantes de même paramètre $\frac{1}{N}$.

La variable Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(Y_k \geq 1)$ avec

$$1-p = \mathbb{P}(Y_k = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{N}\right)^0\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-0} = \left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

donc

$$\boxed{Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1-\left(1-\tfrac{1}{N}\right)^n\right).}$$

(c) L'événement $\{Z_1=0\}\cap\ldots\cap\{Z_N=0\}$ est impossible, car toutes les cases ne peuvent être vides à l'issue des lancers, donc

$$\mathbb{P}\left(\{Z_1=0\}\cap\ldots\cap\{Z_N=0\}\right) = 0 \neq \mathbb{P}(Z_1=0)\times\ldots\times\mathbb{P}(Z_N=0)$$

d'où l'on déduit que

les variables aléatoires Z_k ne sont pas mutuellement indépendantes.

(d) Puisque T_n compte le nombre de cases non vides :

$$\boxed{T_n = \sum_{k=1}^{N} Z_k.}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[T_n\right] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[Z_k\right] = \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$

ce qui redonne bien :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[T_n\right] = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

Probleme 04

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le carré défini par

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x + y| \leq 2 \text{ et } |x - y| \leq 2\right\}.$$

On s'intéresse à la fonction de deux variables $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - x.$$

1. On s'intéresse tout d'abord à la nature de l'ensemble $\mathscr{D}$.

(a) laissé au lecteur.

(b) Soit $(x, y) \in \mathscr{D}$. On a donc

$$|x + y| \leqslant 2 \text{ et } |x - y| \leqslant 2.$$

le point $(x, -y)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$. On majore

$$|x + (-y)| = |x - y| \leqslant 2$$

car $(x, y) \in \mathscr{D}$; et aussi

$$|x - (-y)| = |x + y| < 2$$

pour la même raison. Donc $(x, -y) \in \mathscr{D}$. L'ensemble $\mathscr{D}$ admet donc la droite $y = 0$ pour axe de symétrie ; c'est-à-dire l'axe des abscisses.

(c) Soit (x, y) un point de $\mathscr{D}$. On a comme précédemment

$$|x + y| \leqslant 2 \text{ et } |x - y| \leqslant 2.$$

le point $(-x, -y)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$. On majore

$$|-x + (-y)| = |-x - y| = |x + y| \leqslant 2$$

car $(x, y) \in \mathscr{D}$; et aussi

$$|-x - (-y)| = |-x + y| = |x - y| \leq 2$$

pour la même raison. Donc $(-x, -y) \in \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ est stable par la symétrie centrale de centre $O = (0, 0)$.

(d) Les inégalité définissant $\mathscr{D}$ étant large, l'ensemble $\mathscr{D}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
Aucune boule de rayon ϵ centrée sur le point $(2, 0)$ ne peut être contenue dans $\mathscr{D}$ car $(2 + \frac{\epsilon}{2}, 0) \notin \mathscr{D}$. L'ensemble $\mathscr{D}$ n'est donc pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est continue sur $\mathscr{D}$ car la fonction $(x,y) \longmapsto x$ l'est et que la fonction $(x,y) \longmapsto \ln(x^2+y^2+1)$ l'est aussi car composée d'une fonction polynomiale $(x,y) \longmapsto x^2+y^2+1 \geq 1 > 0$ et de la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ qui est continue sur $[1,+\infty[$.
   par ailleurs l'ensemble $\mathscr{D}$ est fermé d'après la question précédente.
   Enfin, pour $(x,y) \in \mathscr{D}$, on a
   $$|x+y| \leq 2 \text{ et } |x-y| \leq 2$$
   et donc
   $$0 \leq |x+y|^2 = x^2+y^2+2xy \leq 4 \text{ et } 0 \leq |x-y|^2 = x^2+y^2-2xy \leq 4.$$
   On en déduit que
   $$x^2+y^2 4 \text{ puis } \sqrt{x^2+y^2} \leq 2$$
   et donc que $\mathscr{D}$ est inclu dans $B((0,0),2)$ la boule de centre $O=(0,0)$ et de rayon 2. L'ensemble $\mathscr{D}$ est ainsi bornée.
   La fonction f est donc continue sur $\mathscr{D}$ qui est fermé et borné. Le théorème de Weierstraβ assure alors que f est bornée et atteint ses bornes.
3. Dans cette question, on étudie la fonction f définie sur l'ensemble $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par
   $$\mathscr{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x+y| < 2 \text{ et } |x-y| < 2\Big\}.$$
   (a) Soit $(x,y) \in \mathscr{O}$. On calcule
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\\ &= \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1} - 1, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)\\ &= \left(\frac{-x^2+2x-1-y^2}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)\end{aligned}$$
   (b) Soit (x,y) un point critique de f dans $\mathscr{O}$. On a alors $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = (0,0)$; c'est-à-dire
   $$\left(\frac{-x^2+2x-1-y^2}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) = (0,0).$$
   On résout donc le système
   $$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{-x^2+2x-1-y^2}{x^2+y^2+1} & = & 0\\[2ex] \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} & = & 0\end{array}\right. .$$

Comme nécéssairement $x^2 + y^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, ce système est équivalent à

$$\begin{aligned}\begin{cases} -x^2 + 2x - 1 - y^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -(x-1)^2 - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi (x, y) est un point critique de la fonction f dans $\mathscr{O}$ si et seulement si $(x, y) = (1, 0)$

(c) On utilisera pour ce faire le
Théorème de Schwarz : Soit $f : U\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si la fonction f est de classe $\mathbf{C}^2$ alors pour tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Dans notre cas il s'agit de montrer que $f : (x, y) \longmapsto \ln(x^2 + y^2 + 1) - x$ est de classe $\mathbf{C}^2$ sur $\mathscr{O}$. Il suffit pour cela de montrer que ces dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

sont de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathscr{O}$.
Comme pour tout $(x, y) \in \mathscr{O}$, $x^2 + y^2 + 1$ est toujours non nul (cette expression est en fait toujours supérieure à 1), la fonction

$$(x, y) \longmapsto \frac{x}{x^2 + y^2 + 1},$$

qui est une expression rationnelle sans pole sur $\mathbb{R}^2$, est de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur $\mathscr{O}$.
On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ et par symétrie de l'expression que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ l'est aussi.
Ainsi la fonction f considérée est bien de classe $\mathbf{C}^2$ sur $\mathscr{O}$ et d'après le théorème de Schwarz on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

(d) Soit $(x, y) \in \mathscr{O}$. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} - 1\right) = \frac{2x^2 + 2y^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2y^2 - 2x^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

De même on a

$$s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Et :

$$t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{2x^2+2y^2+2-4y^2}{(x^2+y^2+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

(e) Au voisinage de 0, on a

$$DL_3 : \qquad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + [0](u^3)$$

(f) Notons g la fonction d'une variable réelle définie par

$$g(t) = f(1+t,0) - f(1,0) = \ln((1+t)^2+1) - (1+t) - (\ln(2)-1)$$

qui est en fait définie pour tout réel t car $(1+t)^2+1$ et toujours positif. La fonction g est $\mathbf{C}^\infty$ par composition de fonctions $\mathbf{C}^\infty$. Elle admet ainsi un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.
On calcule pour t au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
g(t) &= \ln((t^2+2t+2) - 1 - t - \ln(2) + 1 \\
&= \ln\left(2\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)\right) - t - \ln(2) \\
&= \ln\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) - t \\
&= t + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)^3 + o(t^3) - t \\
&= \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \\
&= \frac{-1}{6}t^3 + o(t^3)
\end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de 0 la fonction g change de signe avec t (en étant de signe opposé à t). Ainsi il en est de même de l'expression $f(1+t,0) - f(1,0)$ et on en déduit que le point critique $(1,0)$ n'est pas un extremum local de f car on peut avoir

$$f(1+t,0) > f(1,0) \text{ ou } f(1+t,0) < f(1,0)$$

suivant $t < 0$ ou $t > 0$.