Devoir libre 05

2TSI. Mathématiques

À rendre le mercredi 20 mars 2024 au plus tard

Décryptage et indications

Dans **le premier exercice**, on étudie la loi d'une variable aléatoire définie par une matrice colonne. On passe par la diagonalisation d'une matrice et pour pouvoir construire cette matrice, on utilise la formule des probabilités totales. Tout ceci est très classique et se retrouve dans un certain nombre de sujets d'oraux (et même d'écrits) que ce soit à CCINP ou dans d'autres concours. Pour la question **Q2**, on pensera à la formule des probabilités totales pour trouver la relation entre U_{n+1} et U_n.
On remarque que $((X_n = 2), (X_n = 1), (X_n = 0))$ est un système complet d'événements.

Pour **le deuxième exercice**, on est placée dans le cadre des univers infinis car le premier résultat inférieur ou égal à 6 peut arriver très très tard si l'on a la scoumoune ! De plus, l'originalité est que le dé est à 10 faces. Pour la question **Q1**, on pourra calculer $P(N = 1)$ puis $P(N = 2)$ et on se dira : mais c'est bien sûr ... et on écrira la loi de N.
Pour la question **Q2**, on utilisera $P((X = k, N = n)) = P(N = n) \times P_{(N=n)}(X = k)$.
Pour la question **Q3**, on applique la formule des probabilités totales avec le bon système complet d'événements.

Exercice 01

Soit une urne avec 3 boules : 2 blanches et 1 rouge. Le protocole est le suivant :
Si une boule blanche est tirée, on l'enlève et si la boule rouge est tirée, on la remet.
Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches sorties de l'urne au $n^{\text{ème}}$ tirage.
On pose pour tout n, $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 2) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 0) \end{pmatrix}$ et on donne $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. On étudie ici M^n.
   (a) Montrer que M est diagonalisable et donner les sous-espaces propres.
   (b) Donner la forme de M^n et la calculer.
2. Déterminer U_1 et U_2.
   Trouver $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$. En déduire la loi de U_n.
3. Soit T_1 le nombre de tirage avant le tirage de la première boule blanche. Déterminer la loi de T_1.

Exercice 02

On lance un dé à 10 faces jusqu'à ce que l'on obtienne un résultat inférieur ou égal à 6. Les lancers sont indépendants et le dé n'est pas pipé. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers et X la variable aléatoire égale au numéro de la face obtenu.

1. Déterminer la loi de N.
2. Calculer pour tout $(k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^\star$, $P((X, N) = (k, n))$.
3. Déterminer la loi de X.
4. X et N sont-elles indépendantes ?