On supposera que $(ME) \perp (AM)$ et que $(NF) \perp (ND)$.

Q1. La base B_1 est obtenue à partir de la base B_0 par la rotation d'axe orienté et dirigé par z_0 et d'angle de mesure θ_1.

Ainsi,

$$\boxed{P_{B_0,B_1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Q2. De même, en utilisant le fait que $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \pi + \theta_2 [2\pi]$, que $\cos(\pi + \theta_2) = -\cos(\theta_2)$ et que $\sin(\pi + \theta_2) = -\sin(\theta_2)$, on a

$$\boxed{P_{B_0,B_2} = \begin{pmatrix} \cos(\pi+\theta_2) & -\sin(\pi+\theta_2) & 0 \\ \sin(\pi+\theta_2) & \cos(\pi+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Q3. On a par la relation de Chasles $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NF}$. Or, $\overrightarrow{DN} = a\overrightarrow{x}_2$ et $\overrightarrow{NF} = -n\overrightarrow{y_2}$.

$\boxed{\text{Dans } B_2, \overrightarrow{DF} \text{ a donc pour coordonnées } (a, -b, 0).}$

Par la formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{B_0}(\overrightarrow{DF}) = P_{B_0,B_2}\text{Mat}_{B_2}(\overrightarrow{DF}) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\cos(\theta_2) - b\sin(\theta_2) \\ -a\sin(\theta_2) + b\cos(\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{dans } B_0, \overrightarrow{DF} \text{ a donc pour coordonnées } (-a\cos(\theta_2) - b\sin(\theta_2), -a\sin(\theta_2) + b\cos(\theta_2), 0).}$

Q4. De même, $\overrightarrow{AE} = a\vec{x}_1 - b\vec{y}_1$.

$\boxed{\text{Dans } B_1, \overrightarrow{AE} \text{ a donc pour coordonnées } (a, -b, 0).}$

Par la formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{B_0}(\overrightarrow{AE}) = P_{B_0,B_1}\text{Mat}_{B_1}(\overrightarrow{AE}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\theta_1) + b\sin(\theta_1) \\ a\sin(\theta_1) - b\cos(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{dans } B_0, \overrightarrow{AE} \text{ a donc pour coordonnées } (a\cos(\theta_1) + b\sin(\theta_1), a\sin(\theta_1) - b\cos(\theta_1), 0).}$

Q5. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} \\ &= -\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{AD} = 2a\vec{x}_0 - (2b + \ell)\vec{y}_0$, on a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{B_0}(\overrightarrow{FE}) &= -\begin{pmatrix} -a\cos(\theta_2) - b\sin(\theta_2) \\ -a\sin(\theta_2) + b\cos(\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a \\ -(2b+\ell) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos(\theta_1) + b\sin(\theta_1) \\ a\sin(\theta_1) - b\cos(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(-2 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) + b(\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) \\ a(\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) + b(2 - \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + \ell \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{FE}$ dans B_0 sont donc

$$\boxed{(a(-2 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) + b(\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)), a(\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) + b(2 - \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + \ell, 0)}$$

Q6. Avec $\theta = \theta_1 = -\theta_2$, on a $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ et $\sin(\theta_1) = -\sin(\theta_2)$, donc

$$\mathrm{Mat}_{B_0}(\overrightarrow{FE}) = \begin{pmatrix} 2a(\cos(\theta) - 1) \\ \ell + 2b(1 - \cos(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $\boxed{EF^2 = (\ell + 2b(1 - \cos(\theta)))^2 + 4a^2(\cos(\theta) - 1)^2}$.

Q7. On développe alors

$$\begin{aligned} EF^2 &= (\ell + 2b(1 - \cos(\theta)))^2 + 4a^2(\cos(\theta) - 1)^2 \\ &= \ell^2 + 4\ell b(1 - \cos(\theta)) + 4b^2(1 - \cos(\theta))^2 + 4a^2(\cos(\theta) - 1)^2 \\ &= \ell^2 + 4\ell b(1 - \cos(\theta)) + 4(a^2 + b^2)(1 - \cos(\theta))^2 \\ &= \ell^2 + 4(1 - \cos(\theta)) \big((a^2 + b^2)(1 - \cos(\theta)) + \ell b\big). \end{aligned}$$

Or, par duplication de l'angle :

$$\cos(\theta) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

donc

$$1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

donc

$$\boxed{EF^2 = \ell^2 + 8\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(2(a^2 + b^2)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \ell b\right).}$$

Comme $\ell b > 0$ et comme $(a^2 + b^2)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$, on a toujours

$$\left(2(a^2 + b^2)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \ell b\right) > 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} EF^2 = \ell^2 &\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = 0\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta = 0\ [2\pi]. \end{aligned}$$

Or, on sait que $-10° < \theta < 10°$.

$\boxed{\text{Vu que } EF = \ell, \text{ on ne peut avoir } \theta_1 = -\theta_2 \text{ que si } \theta = 0.}$

Q8. La fonction f est bien dérivable par opérations usuelles sur les fonctions dérivables.
Si $\theta \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(\theta) = 16(a^2 + b^2)\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + 8\ell b\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

donc

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 32(a^2 + b^2)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) + 8\ell b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 16(a^2 + b^2)\sin(\theta)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 4\ell b\sin(\theta) \\ &= 4\sin(\theta)\left(4(a^2 + b^2)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \ell b\right). \end{aligned}$$

Q9. Pour les mêmes raisons que précédemment, $f'(\theta)$ est du même signe que $\sin(\theta)$. On peut donc dresser son tableau de signes variations.

θ	$-10°$		0		$10°$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↘	0	↗	

Par parité de la fonction f, f est donc maximale pour $\theta = 10°$.

Q10. On réalise les figures sur le même tracé. (voir figure 1) Pour obtenir E, on obtient d'abord M, intersection de (NF) et de la droite horizontale passant par A. E est alors sur cette droite, 20 mm en dessous de M.

Q11. On obtient N' en utilisant le fait que $DN' = 50mm$ et le fait que $(\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{DN'}) = -10°$. Il suffit alors de placer F' en utilisant le fait que $FN' = 20mm$ et le fait que (FN') est orthogonale à (DN').

Q12. On sait de plus que $AE = AE'$. Ainsi, E' est à l'intersection du cercles de centre A et de rayon AE et du cercle de centre F et de rayon $60mm$.

Q13. On sait par la question **Q4.** que, dans le plan, E' est l'image de E par la rotation d'angle θ_1. Ainsi, θ_1 est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AE'})$. Il suffit de le mesurer sur la figure.

Q18. Ce système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \omega_{31z} + \omega_{23x} - \omega_{20z} & = & -\omega_{10z} \\ (a\sin(\theta) - b\cos(\theta))\omega_{31z} + (-c + a\sin(\theta) + b\cos(\theta))\omega_{23x} & = & 0 \\ -(a\cos(\theta) + b\sin(\theta))\omega_{31z} - (2a - a\cos(\theta) + b\sin(\theta)) & = & 0 \end{array}\right.$$

soit $AX = B$, avec X et B comme donnés par l'énoncé, et

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ (a\sin(\theta) - b\cos(\theta)) & (-c + a\sin(\theta) + b\cos(\theta)) & 0 \\ -(a\cos(\theta) + b\sin(\theta)) & -(2a - a\cos(\theta) + b\sin(\theta)) & 0 \end{pmatrix}}.$$

Q19. On développe par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(A) &= -\left[-(a\sin(\theta) - b\cos(\theta)(2a - a\cos(\theta) + b\sin(\theta)) + (-c + a\sin(\theta) + b\cos(\theta))(a\cos(\theta) + b\sin(\theta))\right] \\ &= (a\sin(\theta) - b\cos(\theta)(2a - a\cos(\theta) + b\sin(\theta)) - (-c + a\sin(\theta) + b\cos(\theta))(a\cos(\theta) + b\sin(\theta)) \\ &= 2a^2\sin(\theta) - a^2\sin(\theta)\cos(\theta) + ab\sin^2(\theta) - 2ab\cos(\theta) + ab\cos^2(\theta) - b^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &\qquad - \left(-ac\cos(\theta) - bc\sin(\theta) + a^2\sin(\theta)\cos(\theta) + ab\sin^2(\theta) + ab\cos^2(\theta) + b^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right) \\ &= (2a^2 + bc)\sin(\theta) + (ac - 2ab)\cos(\theta) - 2(a^2 + b^2)\sin(\theta)\cos(\theta), \end{aligned}$$

ce qui donne bien la relation demandée [NdC : je pense qu'il y a une erreur de signe dans l'énoncé, ou dans mon calcul...].

Q20. Ce déterminant ne s'annule donc pas lorsque θ varie dans la plage considérée. La matrice A est donc inversible, et le système est donc inversible.

Q21. On pourrait invoquer la formule de König-Huygens appliquée à la variable aléatoire X suivant une loi

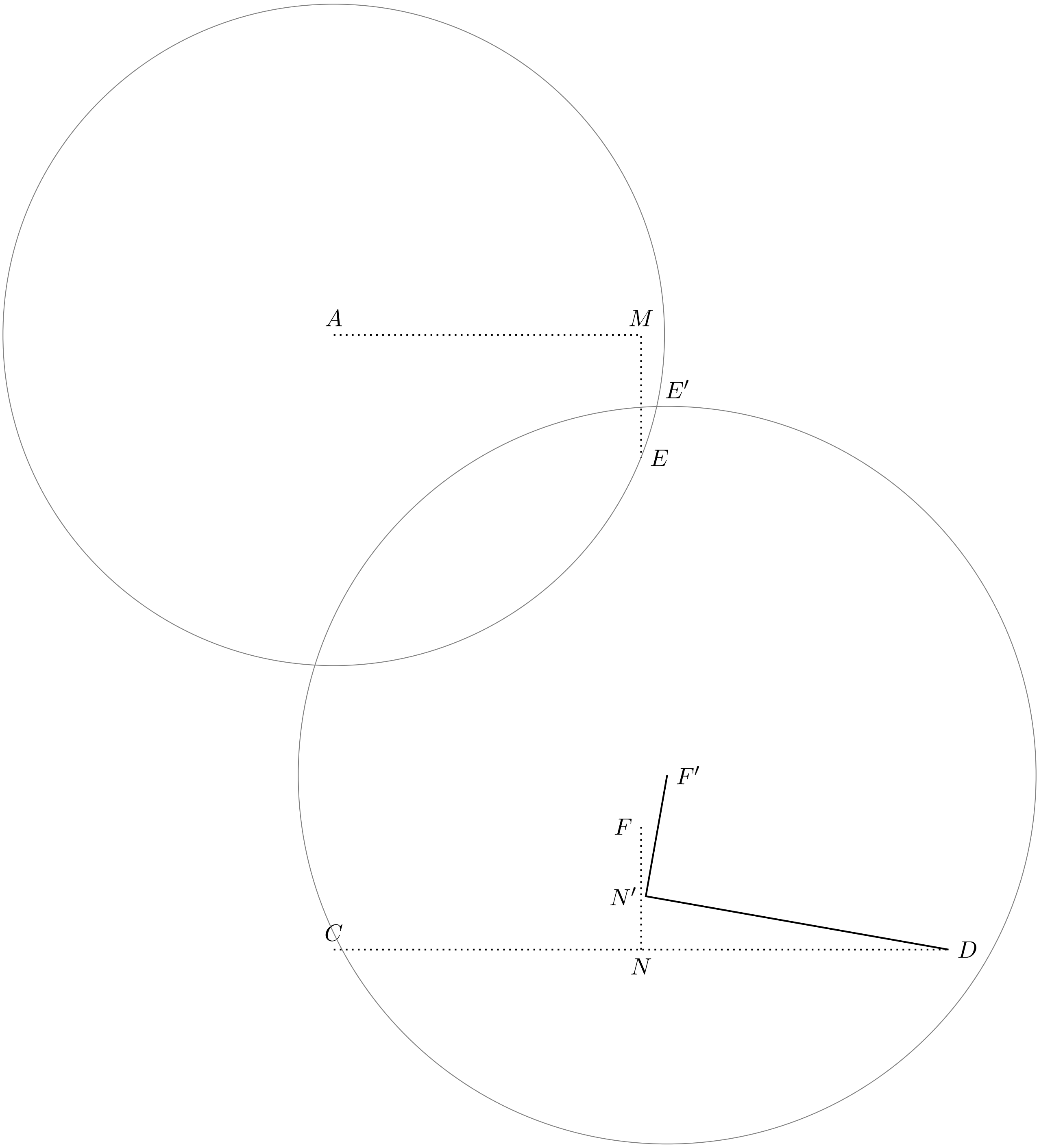

FIGURE 1 – Document réponse

uniforme dans $\{t_1, \ldots, t_n\}$. On peut aussi calculer

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i^2 - 2t_i\bar{t} + (\bar{t})^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{2\bar{t}}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i + (\bar{t})^2 \\ &\boxed{V_t = \overline{t^2} - \bar{t}^2.} \end{aligned}$$

Q22. On reprend le même type de calcul (ou alors on invoque le point de cours analogue) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(t,\theta) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})(\theta_i - \bar{\theta}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i\theta_i - t_i\bar{\theta} - \bar{t}\theta_i + \bar{t}\bar{\theta}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\theta_i - \frac{\bar{\theta}}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{\bar{t}}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_i + \bar{t}\bar{\theta} \\ &= \overline{t\theta} - 2\bar{t}\bar{\theta} + \bar{t}\bar{\theta} \\ &\boxed{\mathrm{Cov}(t,\theta) = \overline{t\theta} - \bar{t}\bar{\theta}.} \end{aligned}$$

Q23. Cette fonction admet bien des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacune de ses variables, car elle est polynomiale en chacune de ces variables.
On a alors en dérivant terme à terme, pour tout u, v,

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial u}(u,v) = \sum_{i=1}^{n} -2t_i(\theta_i - ut_i - v) = -2n\overline{t\theta} + 2nu\bar{t^2} + 2nv\bar{t}}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial v}(u,v) = \sum_{i=1}^{n} -2(\theta_i - ut_i - v) = -2n\bar{\theta} + 2nu\bar{t} + 2nv}$$

Q24. Ce point critique (u, v) vérifie donc

$$\frac{\partial e}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial e}{\partial v}(u,v) = 0,$$

donc vérifie le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} u\bar{t^2} + v\bar{t} &=& \overline{t\theta} \\ u\bar{t} + v &=& \bar{\theta} \end{array}\right.$$

On peut soit vérifier que les valeurs données par l'énoncé sont solutions, ou bien effectuer l'opération $L_1 - \bar{t}L_2$ pour obtenir $V_t u = \mathrm{Cov}(t,\theta)$, et ensuite utiliser la deuxième ligne pour obtenir $v = \bar{\theta} - u\bar{t}$.

Ainsi, $\boxed{\text{il y a bien un seul point critique, de coordonnées } u = \frac{\mathrm{Cov}(t,\theta}{V_t} \text{ et } v = \bar{\theta} - \frac{\mathrm{Cov}(t,\theta}{V_t}\bar{t}.}$

Q25. On a donc $(\bar{t})^2 = 0,25^2 = 0,0625$, donc $V_t = 0,0215$.
De plus, $\bar{t}\bar{\theta} = 0,1$, donc $\mathrm{Cov}(t,\theta) = 0,93$.
Ainsi, on obtient $m = \dfrac{0,93}{0,0215} \approx 43$.
Enfin, on obtient $p = 0,4 - \dfrac{0,93}{0,0215}0,25 \approx -10$.

Q26. D'après l'énoncé, ω_{10z} est la vitesse angulaire, soit ici m.
$\boxed{\text{On obtient donc } \omega_{10z} = m \approx 43\ deg.s^{-1}.}$

Q32. $\boxed{\text{On a au voisinage de 0 : } \cos(x) = 1 + o(x) \text{ et } \sin(x) = x + o(x).}$

Q36. C'est une équation d'ordre 2 à coefficients constants, dont la fonction constante égale à $-K$ est solution évidente.
En divisant par J_{eq}, l'équation homogène associée s'écrit

$$\ddot{\theta} - \alpha^2\theta = 0,$$

l'équation caractèristique associée est donc $r^2 - \alpha^2 = 0$, et a donc deux solutions $\pm\alpha$.
Les solutions de l'équation homogène associée à (C) sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto\mapsto k_1 e^{\alpha t} + k_2 e^{\alpha t}.$$

Les solutions de l'équation (C) sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto\mapsto k_1 e^{\alpha t} + k_2 e^{\alpha t} + K.$$

Pour une telle fonction θ, on a alors

$$\theta(0) = k_1 + k_2 + K$$

et

$$\dot{\theta}(t) = k_1\alpha e^{\alpha t} - k_2\alpha e^{\alpha t},$$

donc

$$\dot{\theta}(0) = \alpha(k_1 - k_2).$$

On a donc $\dot{\theta}(0) = 0$ si et seulement si $k_1 = k_2$.
Lorsque $k_1 = k_2$, on a $\theta(0) = 2k_1 + K$. On a donc $\theta(0) = \frac{-\pi}{18}$ si et seulement si $k_1 = -\frac{\pi}{36} - \frac{K}{2}$.
La solution de ce problème de Cauchy est donc la fonction

$$\boxed{\theta : t \mapsto \left(-\frac{\pi}{36} - \frac{K}{2}\right) e^{\alpha t} + \left(-\frac{\pi}{36} - \frac{K}{2}\right) e^{-\alpha t} + K.}$$

Q37. Comme

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) e^{\alpha t} - \frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) e^{-\alpha t} + K,$$

on a

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) e^{\alpha t} - \frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) e^{-\alpha t} + K - \frac{\pi}{18} = 0.$$

Il suffit de multiplier par $e^{\alpha t} \neq 0$ pour obtenir la condition nécessaire et suffisante demandée.

Q38. On nous demande de démontrer que (4) admet des solutions réelles si et seulement si $K \leq 0$.
Or, pour $K = -\frac{\pi}{18}$, l'équation devient $-\frac{\pi}{9}e^{\alpha t} = 0$, qui n'admet aucune solution réelle (en t).
Il y a probablement une erreur dans l'énoncé.
Ainsi, t est solution si et seulement si $e^{\alpha t}$ est racine du polynôme

$$Q(X) = \frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) X^2 - \left(K - \frac{\pi}{18}\right) X + \left(K + \frac{\pi}{18}\right).$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\left(K - \frac{\pi}{18}\right)^2 - \left(K + \frac{\pi}{18}\right)^2 = -\frac{2K\pi}{9}.$$

Ce discriminant est positif si et seulement si $K \leq 0$, donc si et seulement si $C_m \leq -aP$.

Q39. Cette question n'a pas grand sens, vu que l'équation dont on parle est l'équation (4) et est fonction de t.
Si l'on reprend le trinôme précédent (qui n'en est pas un lorsque $K = -\frac{\pi}{18}$), on trouve deux racines :

$$\frac{\frac{1}{2}\left(K - \frac{\pi}{18}\right) \pm \sqrt{-\frac{2K\pi}{9}}}{\left(K + \frac{\pi}{18}\right)}$$