Devoir surveillé N°06

2TSI-MATHÉMATIQUES

Samedi 23 mars 2024

Les différents exercices sont indépendants.

Exercice 01

Ici l'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix},$$
où a, b, c, d et e sont cinq réels.
Déterminer les réels a, b, c, d et e pour que $A \in O_3(\mathbb{R})$ puis pour que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.
2. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice
$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Caractériser f en étudiant si $B \in O_3(\mathbb{R})$ et dans l'affirmative, en trouvant ses éléments caractéristiques.
3. Soit l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ de matrice
$$C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que C est une matrice orthogonale.
   (b) Justifier que C est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
   (c) Sans calculer le polynôme caractéristique de C, montrer que le spectre de C est inclus dans $\{-1, 1\}$.
   (d) Trouver alors les valeurs propres avec leur ordre de multiplicité (on pourra remarquer que la trace de C est la somme des valeurs propres).
   (e) Écrire une base orthonormée de vecteurs propres de C.
   (f) Reconnaître géométriquement g.

Exercice 02

$\boxed{\textbf{Exercice 03}}$