Devoir surveillé N°06

CORRECTION

Exercice 01

Ici l'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les trois questions sont indépendantes.

Q1. Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d et e sont cinq réels.
Déterminons les réels a, b, c, d et e pour que $A \in O_3(\mathbb{R})$ puis pour que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.
On notera C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A. On a $C_i.C_j = 0$ pour tout $i \neq j$ et $C_i.C_i = 1$ pour tout i.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{a}{\sqrt{3}} + \dfrac{b}{\sqrt{2}} & = & 0 & (1) \\ \dfrac{c}{\sqrt{2}} + ad + \dfrac{e}{\sqrt{2}} & = & 0 & (2) \\ \dfrac{c}{\sqrt{3}} + \dfrac{d}{\sqrt{3}} + be & = & 0 & (3) \\ \dfrac{1}{2} + a^2 + \dfrac{1}{2} & = & 1 & (4) \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + b^2 & = & 1 & (5) \\ c^2 + d^2 + e^2 & = & 1 & (6) \end{cases}.$$

La relation (4) donne $a = 0$ et la relation (5) donne $b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Puis la condition (1) impose $b = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Puis (2) donne $c = -e$ et enfin (3) donne :

$$\frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{d}{\sqrt{3}} + \frac{c}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow c = -\frac{d}{2}.$$

Il reste (6) et $6c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

On a deux matrices solutions.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour A_1, $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ et pour A_2, $C_1 \wedge C_2 = C_3$. Donc $A_2 \in SO_3(\mathbb{R})$ et $A_1 \notin SO_3(\mathbb{R})$.

Q2. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Caractérisons f en étudiant si $B \in O_3(\mathbb{R})$ et dans l'affirmative, en trouvant ses éléments caractéristiques.

Notons encore C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de B. On a bien $C_i.C_j = 0$ pour $i \neq j$ et $C_i.C_i = 1$. Et donc $B \in O_3(\mathbb{R})$. Puis $C_1 \wedge C_2 = C_3$ et donc $B \in SO_3(\mathbb{R})$, B est la matrice d'une rotation vectorielle. On détermine l'axe.

$$BX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + 2z & = & 3x \\ 2x + 2y - z & = & 3y \\ -x + 2y + 2z & = & 3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x - y + 2z & = & 0 \\ 2x - y - z & = & 0 \\ -x + 2y - z & = & 0 \end{array}\right.$$

On a $y = z$ et ensuite $x = z$. Donc si l'on pose $\vec{I} = 1\sqrt{3}(1,1,1)$, l'axe de f est dirigé et orienté par $\vec{I}$.
Puis la trace de B est $2 = 1 + 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$.
Il reste à trouver le signe de $\sin\theta$. Posons $\vec{v} = (1,-1,0)$. On a $\vec{I}.\vec{v} = 0$. Puis $f(\vec{v}) = (1,0,-1)$. Rapidement $\mathsf{Det}\,(\vec{I}, \vec{v}, g(\vec{v})) > 0$ et donc l'angle est $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Q3. Soit l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Q3-a On a clairement $C_i.C_j = \delta_{i,j}$ et $C \in O_3(\mathbb{R})$.
Q3-b La matrice C est symétrique réelle donc diagonalisable.
Q3-c $\|g(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ et si $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à λ,

$$\|g(\vec{x})\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|.\|\vec{x}\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \in \{-1, 1\}.$$

Q3-d On a $TrC = 1$ et si n_1 est l'ordre de multiplicité de -1 et n_2 celui de 1, on a alors $-n_1 + n_2 = 1$. Le seul couple possible est $n_1 = 1$ et $n_2 = 2$. Donc -1 est une valeur propre simple et 1 est une valeur propre double.
Q3-e On détermine les sous-espaces propres.

$$CX = -X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + 8y - 4z & = & -9x \\ 8x + y + 4z & = & -9y \\ -4x + 4y + 7z & = & -9z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x + 4y - 2z & = & 0 \\ 4x + 5y + 2z & = & 0 \\ -x + y + 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

Alors $(2,-2,1)$ porte la droite $E_{-1}(g)$. Un vecteur unitaire est $\vec{I} = \dfrac{1}{3}(2,-2,1)$.
$CX = X \Leftrightarrow 2x - 2y + z = 0$. Une base est $(\vec{u}_1 = (1,0,-2), \vec{u}_2 = (0,1,2))$.
On applique l'algorithme de Gram-Schmidt : $\left\{\begin{array}{rcl} \vec{v}_1 & = & \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 & = & \vec{u}_2 + a\vec{u}_1 \end{array}\right.$. On impose $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0$.

$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow (1,0,-2).(a,1,2-2a) = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{5}.$$

Alors $\vec{v}_2 = \dfrac{1}{5}(4,5,2)$. Il suffit de rendre unitaires nos vecteurs. $\|\vec{v}_2\| = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2),\ \vec{w}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,5,2).$$

Cette famille est une base orthonormée de $E_1(g)$.
Q3-f Ainsi g est la symétrie orthogonale autour du plan $E_1(g)$.

Exercice 02

Partie A.

Q1-a Si $y'' = 0$ alors $y(t) = at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Q1-b L'équation caractéristique est $X^2 + \alpha = 0$ de racines $\pm i\sqrt{\alpha}$.

$$y(t) = a\cos(t\sqrt{\alpha}) + b\sin(t\sqrt{\alpha}).$$

Q2-a $u'(t) = v(t^2) + 2t^2v'(t^2)$.
Q2-b $u''(t) = 2tv'(t^2) + 4tv'(t^2) + 2t^2 \times 2tv''(t^2)$. On arrange.

$$u''(t) = 6tv'(t^2) + 4t^3v''(t^2).$$

Q2-c u est solution de $(E_\alpha) \Leftrightarrow u''(t) + \alpha u(t) = 0$

$$\Leftrightarrow 6tv'(t^2) + 4t^3v''(t^2) + \alpha tv(t^2) = 0.$$

On a le droit de diviser par $t > 0$ et de poser $x = t^2$.

$$4xv''(x) + 6v'(x) + \alpha v(x) = 0.$$

Q3-a Comme $u(t) = at + b = tv(t^2)$, $v(t^2) = a + \dfrac{b}{t}$. Si l'on pose $x = t^2$, $v(x) = a + b\sqrt{x}$.

Q3-b Comme $u(t) = a\cos(t\sqrt{\alpha}) + b\sin(t\sqrt{\alpha})$, $v(t^2) = \dfrac{a}{t}\cos(t\sqrt{\alpha}) + \dfrac{b}{t}\sin(t\sqrt{\alpha})$.

$$v(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x\alpha}) + \frac{b}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{}).$$

Partie B

Q1 Comme $\{(0, 0, 0)\}$ est un fermé, U est le complémentaire d'un fermé donc est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
Q2-a la fonction f est la composée de $(x, y, z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ fonction polynomiale donc $\mathscr{C}^2$ et la fonction v de classe $\mathscr{C}^2$ donc est de classe $\mathscr{C}^2$.
Q2-b On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xv'(x^2 + y^2 + z^2)$.
Q2-c On a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2v'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2v''(x^2 + y^2 + z^2)$.
On a aussi : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 2v'(x^2 + y^2 + z^2) + 4y^2v''(x^2 + y^2 + z^2)$.
On a aussi : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 2v'(x^2 + y^2 + z^2) + 4z^2v''(x^2 + y^2 + z^2)$.
Q2-d Alors $\Delta f(x, y, z) = 6v'(x^2 + y^2 + z^2) + 4(x^2 + y^2 + z^2)v''(x^2 + y^2 + z^2)$.
Q3. $\Delta f + \alpha f = 0 \Leftrightarrow 6v'(t) + 4tv''(t) + \alpha v(t) = 0$ en posant $t = x^2 + y^2 + z^2$. Et donc v est bien solution de (F_α).
Q4 La fonction $v : t \mapsto \dfrac{c_1}{\sqrt{t}} + c_2$ est solution de (F_0). Ainsi :

$$g : (x, y, z) \mapsto v(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{c_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c_2$$

a un laplacien nul.

Exercice 03

Q1 On remarque que pour tout $t \in [-\pi, \pi[$, $f(-t) = (-t)cos(-t) = -t\cos t = -f(t)$ et donc f est impaire.

Q2-a Comme f est impaire, les coefficients a_n pour $n \geqslant 0$ sont nuls.

Q2-b On a : $b_1 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\, dt = \dfrac{4}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos t \sin t\, dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(2t)\, dt$.

Il reste à faire une intégration par parties.

$$b_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \times \frac{-\cos(2t)}{2}\, dt + \frac{1}{\pi}\left[-t\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}.$$

Q2-c On a pour $n \geqslant 2$,

$$b_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} t\cos t \sin(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(\sin((n+1)t) + \sin((n-1)t)\right)\, dt.$$

On fait encore une intégration par parties.

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{-\cos((n-1)t)}{n-1}\right) dt + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-t\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{-t\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^{\pi}.$$

On trouve : $b_n = -\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{n-1} = \dfrac{(-1)^n 2n}{n^2-1}$.

Q3-a Pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, $\dfrac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) = S_f(f)(t) = f(t)$.

Q3-b Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $]-\pi, \pi[$, on en déduit que S_f tend vers f sur $]-\pi, \pi[$.

Q4-a On a bien en mettant au même dénominateur :

$$b_n^2 = \frac{4n^2}{(n^2-1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

Q4-b Comme $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{n^2-1} \sim \dfrac{2}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme la série de terme général $1/n^2$ converge (car série de Riemann avec $\alpha > 1$), il en est de même de la série de terme général $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$. Enfin : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}$.

Il suffit de faire tendre N vers $+\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}$.

Q4-c On a : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2 = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{3}{2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}$.

Q5-a On a $J = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t^2 + t^2\cos(2t)\right) dt = \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2}I$, avec$I = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(2t)\, dt$.

Par intégration par parties, en dérivant t^2 et en intégrant $\cos(2t)$ puis en dérivant $2t$ et en intégrant $\frac{1}{2}\sin(2t)$, on obtient : $I = \dfrac{\pi}{2}$. D'où : $J = \dfrac{\pi^3}{6} + \dfrac{\pi}{4}$.

Q5-b On a Marc-Antoine Parseval : $\displaystyle\frac{b_1^2}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b_n^2}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos^2 t\, dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos^2 t\, dt = \frac{J}{\pi}$.

$$\frac{b_1^2}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b_n^2}{2} = \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}\right).$$

En développant, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.