Correction Devoir libre 05

2TSI. Mathématiques

Exercice 01

Q1-a M est diagonalisable car le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(t) = (t-6)(t-3)(t-2)$ et donc M a trois valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension 3.

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $E_{\lambda_i}(M)$ est l'espace propre de M associé à λ_i.

$$X \in E_6(M) \Leftrightarrow MX = 6X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 6x+3y & = & 6x \\ 3y+4z & = & 6y \\ 2z & = & 6z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 3y & = & 0 \\ 3y & = & 6y \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $E_6(M) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$X \in E_3(M) \Leftrightarrow MX = 3X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 6x+3y & = & 3x \\ 3y+4z & = & 3y \\ 2z & = & 3z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 3y & = & 1-3x \\ 3y & = & 3y \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $E_3(M) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$X \in E_2(M) \Leftrightarrow MX = 2X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 6x+3y & = & 2x \\ 3y+4z & = & 2y \\ 2z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 4x & = & -3y \\ y & = & -4z \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 3z \\ -4z \\ z \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $E_2(M) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Si l'on prend la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{Diag}\,(6,3,2)$, $M = PDP^{-1}$.

Q1-b Par une récurrence qu'on vous laisse faire à la demande, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
Il reste le calcul de P^{-1} avant celui de M^n. Le plus simple est d'inverser un système.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & x+y+3z \\ y' & = & -y-4z \\ z' & = & z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x'+y'+z' \\ y & = & -y'-4z' \\ z & = & z' \end{array} \right. \Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après un dernier calcul courageux, $M^n = \begin{pmatrix} 6^n & 6^n - 3^n & 6^n - 4\times 3^n + 3\times 2^n \\ 0 & 3^n & 4\times 3^n - 4\times 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Commentaires : On peut vérifier que $M^1 = \begin{pmatrix} 6 & 6-3 & 6-4\times 3+3\times 2 \\ 0 & 3 & 4\times 3-4\times 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M$. Et notre calcul est cohérent. À faire le jour de l'oral pour montrer à l'examinateur qu'on se soucie de la véracité des calculs effectués.

Q2. On commence par remarquer que pour $n=1$, $X_n(\Omega)=\{0,1\}$ et à partir de $n=2$, $X_n(\Omega)=\{0,1,2\}$. On pourra par convention écrire $P(X_1=2)=0$. Immédiatement, $U_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour le calcul de U_2, on va utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $((X_1=0),(X_1=1))$.

$$P(X_2=0) = P_{(X_1=0)}(X_2=0)P(X_1=0) + P_{(X_1=1)}(X_2=0)P(X_1=1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

$$P(X_2=1) = P_{(X_1=0)}(X_2=1)P(X_1=0) + P_{(X_1=1)}(X_2=1)P(X_1=1) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

$$P(X_2=2) = P_{(X_1=0)}(X_2=2)P(X_1=0) + P_{(X_1=1)}(X_2=2)P(X_1=1) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

On peut en déduire que $U_2 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Commentaires : Attention, comme on ne remet pas une boule blanche si elle est tirée, il n'y a pas d'indépendance et par exemple, on ne peut pas écrire $P(X_2=2) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. La formule des probabilités totales doit bien être appliquée.

Pour le cas général, on va utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $((X_n=0),(X_n=1),(X_n=2))$.

Commentaires : Remarquons que $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)=0$ pour $i>j$. Et donc la matrice à chercher est triangulaire supérieure.

Pour commencer $P(X_{n+1}=2)$ est égal à $\sum_{i=0}^{2} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=2)P(X_n=i)$. Par ailleurs :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)=0,\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2},\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=1.$$

Et donc on en déduit :

$$P(X_{n+1}=2) = 1\times P(X_n=2) + \frac{1}{2}\times P(X_n=1) + 0\times P(X_n=0).$$

Puis $P(X_{n+1}=1)$ est égal à $\sum_{i=0}^{2} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=1)P(X_n=i)$. Par ailleurs :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=\frac{2}{3},\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2},\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=0.$$

Et donc on en déduit :

$$P(X_{n+1}=1) = 0\times P(X_n=2) + \frac{1}{2}\times P(X_n=1) + \frac{2}{3}P(X_n=0).$$

Enfin $P(X_{n+1}=0)$ est égal à $\sum_{i=0}^{2} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=0)P(X_n=i)$. Par ailleurs :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{3},\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=0,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0.$$

Et donc on en déduit :

$$P(X_{n+1}=0)=0\times P(X_n=2)+0\times P(X_n=1)+\frac{1}{3}P(X_n=0).$$

On écrit tout ceci matriciellement.

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix} P(X_{n+1}=2)\\ P(X_{n+1}=1)\\ P(X_{n+1}=0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(X_n=2)\\ P(X_n=1)\\ P(X_n=0)\end{pmatrix}=\frac{1}{6}MU_n.$$

Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $U_n=\dfrac{1}{6^{n-1}}M^{n-1}U_1$. Il reste à utiliser **Q2**.

$$U_n=\frac{1}{6^{n-1}}\begin{pmatrix} 6^{n-1} & 6^{n-1}-3^{n-1} & 6^{n-1}-4\times 3^{n-1}+3\times 2^{n-1}\\ 0 & 3^{n-1} & 4\times 3^{n-1}-4\times 2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

On commence par arranger la matrice.

$$U_n=\begin{pmatrix} 1 & 1-\dfrac{1}{2^{n-1}} & 1-\dfrac{4}{2^{n-1}}+\dfrac{3}{3^{n-1}}\\ 0 & \dfrac{1}{2^{n-1}} & \dfrac{4}{2^{n-1}}-\dfrac{4}{3^{n-1}}\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3^{n-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Or $U_n=\begin{pmatrix} P(X_n=2)\\ P(X_n=1)\\ P(X_n=0)\end{pmatrix}$. On en déduit la loi de X_n.

$$P(X_n=2)=\frac{1}{3}\left(2-\frac{2}{2^{n-1}}+1-\frac{4}{2^{n-1}}+\frac{3}{3^{n-1}}\right)=1-\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-1}}.$$

$$P(X_n=1)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{4}{2^{n-1}}-\frac{4}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{4}{3^n}.$$

$$P(X_n=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{3^n}.$$

Commentaires : On peut vérifier $P(X_n=0)+P(X_n=1)+P(X_n=2)=1$.
On peut aussi vérifier pour $n=1$ et retrouver la loi de X_1.
$P(X_1=0)=\dfrac{1}{3}$, $P(X_1=1)=2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}$ et $P(X_1=2)=1-2+1=0$.
On peut aussi vérifier pour $n=2$ et retrouver la loi de X_2.
$P(X_2=0)=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$, $P(X_2=1)=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$ et $P(X_2=2)=1-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

3. Prenons le rang au sens strict, c'est-à-dire que l'événement $(T_1=0)$ signifie que l'on tire la première boule blanche au premier tirage. On a $P(T_1)=\dfrac{2}{3}$. De même, $(T_1=1)$ signifie que l'on tire la première boule blanche au second tirage.

$$P(T_1=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}.$$

De façon générale, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T_1=n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3^n}.$

Commentaires : Attention, ce n'est pas la loi géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Il y a un décalage.

Exercice 02

Q1. Pour commencer, $N(\Omega) = \mathbb{N}^\star$. Puis $P(N=1) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ et $P(N=2) = \dfrac{4}{10} \times \dfrac{6}{10} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5}$.

$$\forall k \geqslant 2,\ P(N=k) = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \times \frac{3}{5},$$

car $(N=k)$ signifie que l'on a fait $k-1$ lancers pour lesquels la face obtenue est égale à $7, 8, 9$ ou 10 donc de probabilité $\frac{2}{5}$ et enfin au $k^{\text{ème}}$ lancer on a une face égale à $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 donc de probabilité $\frac{3}{5}$. On reconnaît une loi géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

$$N \sim \mathrm{G}\left(\frac{3}{5}\right).$$

Q2. Pour tout $(k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^\star$, on part de :

$$P((X, N) = (k, n)) = P((X = k, N = n)) = P(N = n) \times P_{(N=n)}(X = k).$$

Pour commencer, $P_{(N=n)}(X = k) = \dfrac{1}{6}$. En effet, comme toutes les faces sont équiprobables et en supposant $(N = n)$ réalisé, ce qui signifie que l'on va tirer au $n^{\text{ème}}$ essai nécessairement une face comprise entre 1 et 6. Donc on a une probabilité $\frac{1}{6}$ de tirer la face k.

$$\forall (k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^\star,\ P((X = k, N = n)) = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2^{n-2}}{5^n}.$$

Q3. On veut déterminer la loi marginale selon X. On utilise le système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ et on applique la formule des probabilités totales pour calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$.

Commentaires : Chaque fois que l'on utilise la formule des probabilités totales, il faut bien indiquer quel système complet d'événement l'on utilise.

Pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, $P(X = k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P((X = k, N = n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-2}}{5^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Il reste :

$$\forall k \in [\![1, 6]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{1 - \dfrac{2}{5}} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi X suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Q4. N et X sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^\star,\ P((X, N) = (k, n)) = P(X = k)P(N = n).$$

On part de $P((X, N) = (k, n))$ et on fait apparaître $P(X = k)$ et $P(N = n)$.

$$\forall (k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^\star,\ P((X, N) = (k, n)) = \frac{2^{n-2}}{5^n} = \frac{1}{6} \times \frac{2^{n-2}.6}{5^n}.$$

Ce qui donne :

$$\forall (k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^\star,\ P((X, N) = (k, n)) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \frac{6}{5} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.\frac{3}{5}.$$

On reconnaît pour tout $(k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^\star$, $P(X = k)P(N = n)$ et on a bien indépendance.