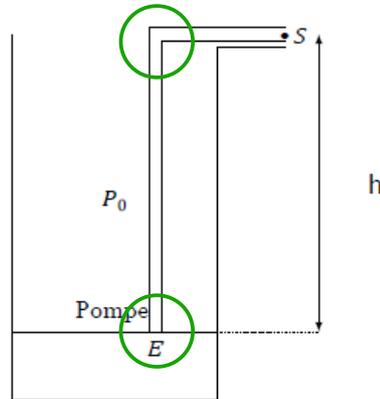


Corrigé dernier devoir

Problème I : eau d'irrigation

Pour l'irrigation des cultures sous serre, l'eau est puisée à une profondeur $h = 30$ m. À la surface libre du puits, la pression de l'eau P_E équivaut à la pression atmosphérique $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa. La pression d'utilisation au niveau du sol est de $P_S = 1,5 \cdot 10^5$ Pa. Le débit volumique est de $Q = 1,0$ L.s⁻¹. La conduite possède une section $\Sigma = 2,5 \cdot 10^{-3}$ m² constante.



Q1 L'écoulement dans une conduite d'un fluide parfait incompressible en régime stationnaire vérifie la relation de Bernoulli le long de la conduite .

En tout point M de la ligne de courant(centrale) : $\frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + gz = \text{constante}$ avec v la vitesse moyenne en M , z , l'altitude de M , P la pression en M . En terme de pression , on peut écrire

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho gz = C \quad (\text{C appelée charge de l'écoulement})$$

Q2 : Il y a pertes de charges au niveau des coudes de la canalisation, à ce niveau l'hypothèse fluide parfait ne peut plus être prise en compte, la viscosité du fluide entraîne une perte d'énergie par frottements donc une diminution de C (énergie volumique)

Q3. L'écoulement est incompressible en régime stationnaire, il y a conservation du débit volumique le long de la conduite .

Avec $Q = v\Sigma = \text{constante}$ en E et S et $\Sigma = \text{constante}$, on en déduit : $v_E = v_S$.

Q4. On applique la relation de Bernoulli généralisé en terme de puissance entre E et S .

$$D_m \left[\left(\frac{1}{2}v_S^2 + \frac{P_S}{\rho} + gz_S \right) - \left(\frac{1}{2}v_E^2 + \frac{P_E}{\rho} + gz_E \right) \right] = P_{méca}$$

Avec D_m (débit massique) = ρQ , $P_E = P_0$, $v_E = v_S$ et $z_S - z_E = h$, on obtient

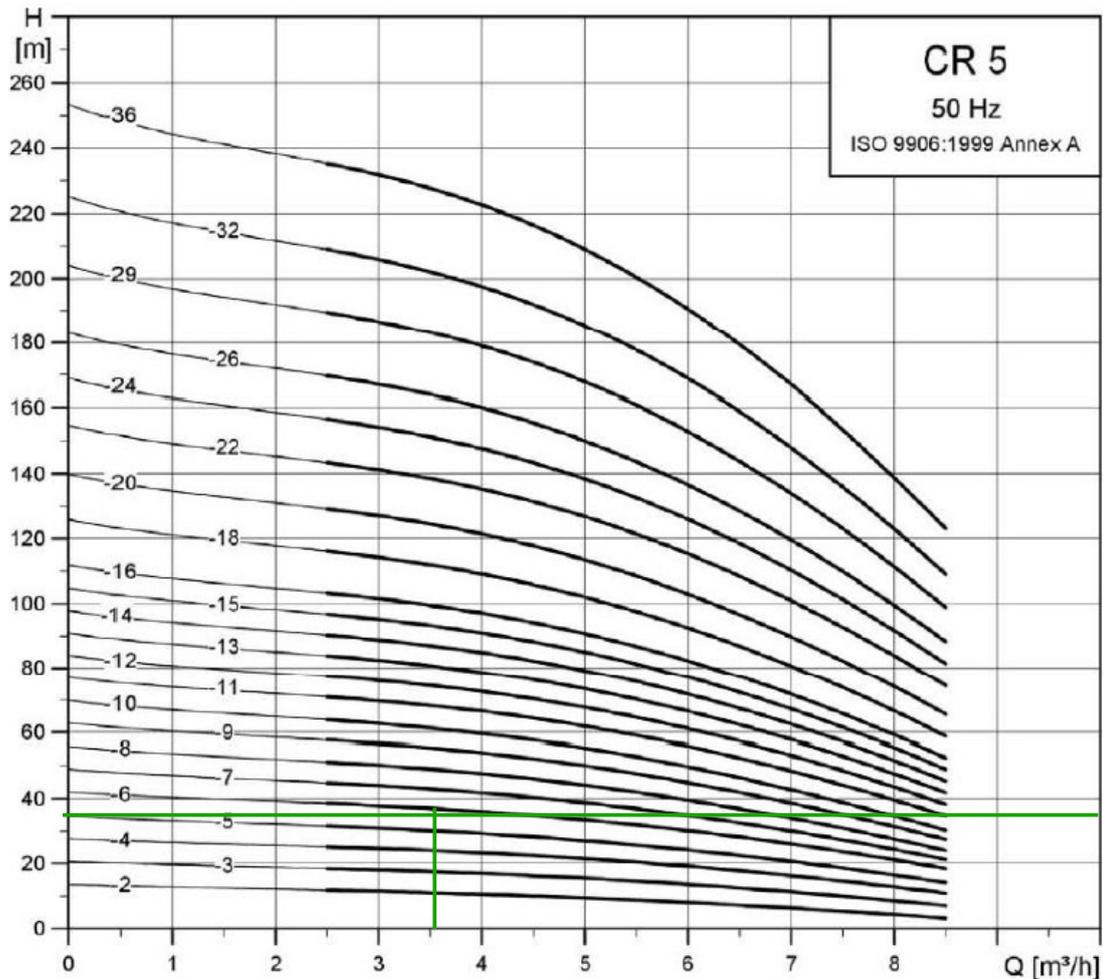
$$P_{méca} = Q(P_S - P_0 + \rho gh)$$

Q5. Le rendement de la pompe vaut $\eta = 0,8$.

$$P_{elec} = \frac{P_{méca}}{\eta} = \frac{Q(P_S - P_0 + \rho gh)}{\eta}$$

A.N. $P_{elec} = \frac{10^{-3}(0,5) \cdot 10^5 + 9,8 \cdot 1000 \cdot 30}{0,8} = \frac{(50) + 9,8 \cdot 30}{0,8} = 430$ W *erreur de donnée numérique

Q6. $H = h + \frac{P_S - P_0}{\rho g}$ A.N. $H = 30 + \frac{0,5 \cdot 10^5}{1000 \cdot 9,8} = 30 + \frac{50}{9,8} = 35,1$ m $Q = 10^{-3} \cdot 3600 = 3,6$ m³.h⁻¹



La pompe 6 correspond aux critères (H, Q) imposés

B . Analyse de l'eau captée

Une eau ne peut servir en irrigation que si la concentration massique en dioxygène dissout est supérieure à 5 mg.L⁻¹

Q7. On calcule le nombre d'oxydation de Mn dans chaque espèce

n.o (Mn)		La place de chaque espèce contenant Mn est alors
III	Mn ³⁺ _(aq) :4, Mn(OH) _{3(s)} :5	déterminé sachant que
II	Mn ²⁺ _(aq) :2, Mn(OH) _{2(s)} :3	-le potentiel d'oxydo-réduction est une fonction
O	Mn _(s) :1	croissante du n.o ;
		-les hydroxydes prédominent aux pH élevés

Q8. A la frontière , la solution est saturée , elle correspond au début de précipitation de l'hydroxyde.



On a donc $Q_r = K_s$ avec $[\text{Mn}^{3+}_{(aq)}] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $Q_r = [\text{Mn}^{3+}_{(aq)}] [\text{OH}^-_{(aq)}]^3 / c^4$

$$[\text{OH}^-_{(aq)}] = (K_s * c^4 / [\text{Mn}^{3+}_{(aq)}])^{1/3} \quad \text{A.N. } [\text{OH}^-_{(aq)}] = (10^{-35,6} / 10^{-2})^{1/3} = 10^{-11,2}$$

$$\text{et } [\text{OH}^-_{(aq)}] * [\text{H}_3\text{O}^+_{(aq)}] / c^2 = K_e \quad \text{A.N. } [\text{H}_3\text{O}^+_{(aq)}] = 10^{-14} / 10^{-11,2} = 10^{-2,8} \quad \text{pH}=2,8$$

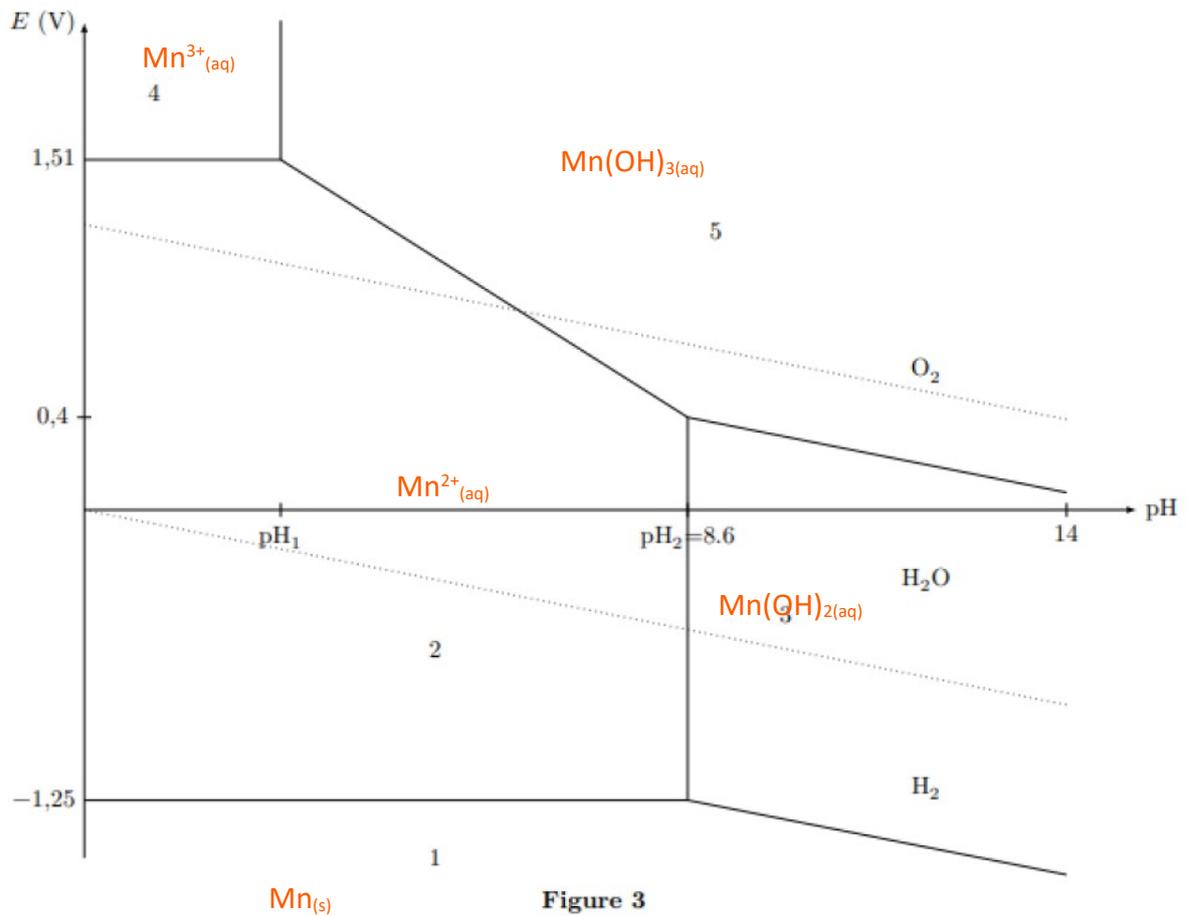


Figure 3

Q9.

couple $O_{2(g)}/H_2O_{(l)}$ $O_{2(g)} + 4H^+_{(aq)} + 4e^- = 2H_2O_{(l)}$

$$E = E^\circ + \frac{0,06}{4} \log(a_{O_2} * (a_{H^+})^4) = E^\circ + \frac{0,06}{4} \log\left(\frac{p_{O_2}}{P^\circ} * \left(\frac{[H^+_{(aq)}]}{C^\circ}\right)^4\right)$$

A la frontière $p_{O_2} = p^\circ$

$$E_f = E^\circ + \frac{0,06}{4} \log\left(\left(\frac{[H^+_{(aq)}]}{C^\circ}\right)^4\right) = E^\circ + 0,06 \log\left(\frac{[H^+_{(aq)}]}{C^\circ}\right) = E^\circ - 0,06 \text{ pH} = \mathbf{1,23 - 0,06 \text{ pH}}$$

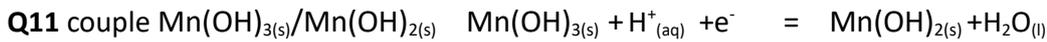
couple $H_2O_{(l)}/H_{2(g)}$ $H_2O_{(l)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- = H_{2(g)} + H_2O_{(l)}$

$$E = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log(a_{H^+})^2 / (a_{H_2}) = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{P^\circ}{p_{H_2}} * \left(\frac{[H^+_{(aq)}]}{C^\circ}\right)^2\right)$$

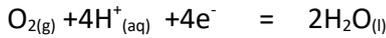
A la frontière $p_{H_2} = p^\circ$

$$E_f = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log\left(\left(\frac{[H^+_{(aq)}]}{C^\circ}\right)^2\right) = E^\circ - 0,06 \text{ pH} = \mathbf{-0,06 \text{ pH}}$$

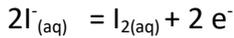
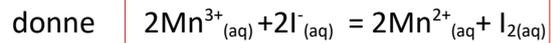
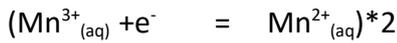
Q10 Les domaines associés à $Mn_{(s)}$ et $Mn(OH)_{3(s)}$ ne présentent pas d'intersection avec celui de l'eau. Ces espèces sont donc instables dans l'eau. Les autres espèces sont stables dans l'eau.



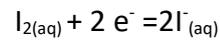
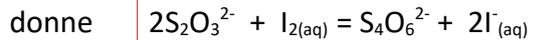
Q13 C'est une réaction d'oxydo-réduction



Q15 C'est une réaction d'oxydo-réduction

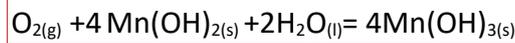


Q16 C'est une réaction d'oxydo-réduction



Q17

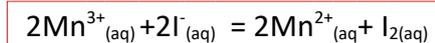
1. action de $\text{Mn}(\text{OH})_2(\text{s})$ sur $\text{O}_2(\text{g})$



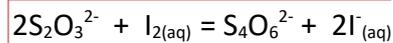
2. acidification du milieu



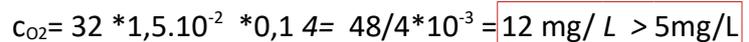
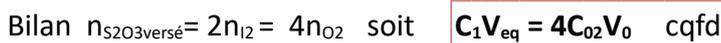
2. bis action de $\text{I}^-(\text{aq})$ sur $\text{Mn}^{3+}(\text{aq})$



3. dosage de I_2



A l'équivalence (plus de réactifs) $\xi = n_{\text{S}_2\text{O}_3\text{versé}} / 2 = n_{\text{I}_2}$



L'eau puisée peut servir à l'irrigation

Q19

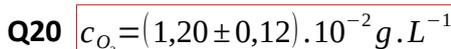
identiques à 9,10

11 $C_1 = 1.5e-2$

12 $u_{C_1} = 1.5e-3$

Identique à 15 et 16

17 $C_1_{\text{sim}} = C_1 + \text{rd.normal}(\theta, U_{C_1}, N)$



Problème 2 : Détecteur de pluie d'une voiture

A. Capteur électro-optique

A.1. Par définition de l'indice optique : $n = \frac{c}{v}$ et $\lambda = v f = \frac{c f}{n}$ avec c la célérité dans le vide, v la célérité dans le milieu et f la fréquence de l'onde.

donc $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ AN : $\lambda_{verre} = 467 \text{ nm}$ et $\lambda_{eau} = 526 \text{ nm}$

A.2. Dans le cas limite d'une réflexion totale pour une interface verre/air, d'après la 2ème loi de Descartes pour la réfraction :

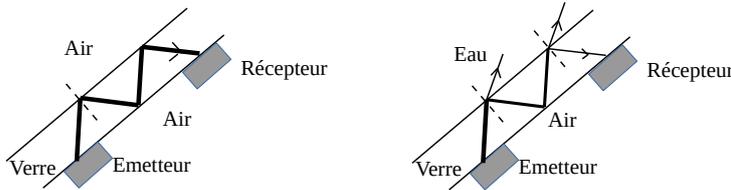
$n_{verre} \sin(i_l) = n_{air}$ soit un angle d'incidence limite : $i_l = \arcsin\left(\frac{n_{air}}{n_{verre}}\right)$

AN : $i_{l,verre/air} = 41,8^\circ$

Pour une interface verre/eau : $i_l = \arcsin\left(\frac{n_{eau}}{n_{verre}}\right)$ AN : $i_{l,verre/eau} = 62,5^\circ$

A.3. Un angle $i_0 = 40^\circ$ donne un angle d'incidence sur l'interface verre/air ou verre/eau de $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, qui est un angle compris entre les deux angles limites de la question précédente. Il y aura donc réflexion totale uniquement en absence d'eau sur le pare-brise.

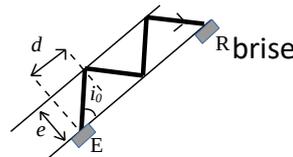
A.4.



A.5. On a : $\tan(i_0) = e/d$ donc $d = e/\tan(i_0)$

Le nombre de réflexions sur la face externe du pare-brise $p = ER/2d$

Soit $p = ER \tan(i_0) / 2e$ AN : $p = 28$



vérifie :

- Plus il y aura de réflexions sur l'interface verre-eau et plus l'intensité du rayon lumineux sera affaiblie. La distinction entre l'intensité lumineuse reçue avec ou sans eau sera donc plus facile.

- La pluie ne mouille pas uniformément la vitre. Avec p réflexions on a plus de chances de rencontrer une goutte de pluie.

A.6. D'après la caractéristique de la diode, celle-ci doit être polarisée en inverse (tension u négative) pour que le courant qui la traverse dépende de manière significative de l'intensité lumineuse reçue.

A.7. L'énergie d'un photon est donnée par la relation de Planck-Einstein :

$E_{1\ photon} = h \nu = h \frac{c}{\lambda_0} = h \frac{c}{n \lambda}$ avec h la constante de Planck.

Donc pour N photons : $E_{N\ photons} = \frac{N h c}{n \lambda}$

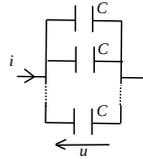
B. Capteur capacitif

B.1. Un condensateur est formé de deux conducteurs séparés par un isolant. La tension entre les lames successives étant identique ce capteur est équivalent à ce système :

$$\text{Loi des nœuds : } i = \sum_{k=1}^N C \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \sum_{k=1}^N C$$

donc la capacité équivalente est $C_{eq} = N C$

Ou bien : En complexe : somme des inductances.



B.2. Notons \vec{E} le champ électrique au point M .

Tout plan orthogonal au plan (Oxy) et contenant M est un plan de symétrie de la distribution de charges, or le champ \vec{E} appartient à ces plans, donc $\vec{E}(M)$ est selon \vec{e}_z .

Il y a invariance de la distribution par translation selon \vec{e}_x et \vec{e}_y , donc $\vec{E}(M)$ ne dépend que de z .

Le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la distribution de charges et donc de \vec{E} , donc $\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$

Le plan (Oxy) étant infini, la distribution de charges vue du point M est la même quelque que soit z , donc $\|\vec{E}\|$ ne dépend pas de z .

Autre justification : Appliquer le théorème de Gauss avec une surface n'englobant pas la surface chargée.

On a donc bien : $\vec{E} = A \vec{e}_z$ si $z > 0$ et $\vec{E} = -A \vec{e}_z$ si $z < 0$ avec A une constante.

B.3. Théorème de Gauss avec pour surface fermée un cylindre d'axe Oz fermé par deux disques de surface S dans les plans de cote z et $-z$:

$$\oiint \vec{E}(M) \cdot \vec{n}_s dS = \frac{Q_{\text{intérieur}}}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad AS + AS = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

B.4. En utilisant le principe de superposition le champ E entre les armatures vérifie : $\vec{E} = 2A \vec{e}_z$ où \vec{e}_z est orthogonal aux armatures.

D'après la définition du potentiel électrostatique : $\int_0^e \vec{E} \cdot \vec{dl} = U$ avec U la différence de potentiel entre les deux armatures et en considérant qu'une armature est dans le plan $z = 0$ et l'autre dans le plan $z = e$.

Donc $U = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$. En multipliant par la surface des armatures on obtient :

$$US = \frac{\sigma S e}{\epsilon_0} = \frac{q e}{\epsilon_0} \quad \text{or} \quad q = C_0 U \quad \text{donc} \quad \boxed{C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e}}$$

B.5. On a $C_{tot} = N C_0$ et $e = \frac{\epsilon_0 S}{C_0}$ donc $\boxed{e = \frac{N \epsilon_0 S}{C_{tot}}}$ AN : $e \approx 90 \mu m$

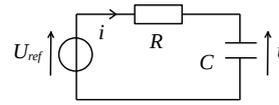
B.6. D'après B.4. $\epsilon_0 = C_0 \frac{e}{S}$ Donc ϵ_0 s'exprime en $\underline{F^1 \cdot m^{-1}}$ donc $\alpha = -1$ et $\beta = 1$

B.7. On a $i = C \frac{du}{dt}$. i étant constant, on trouve en intégrant : $U_{ref} = \frac{i \Delta t}{C}$ si le condensateur

est initialement déchargé. Donc $C = \frac{i \Delta t}{U_{ref}}$.

B.8. Charge sous une tension constante U_{ref} :

a. Loi des mailles : $Ri + u = U_{ref}$



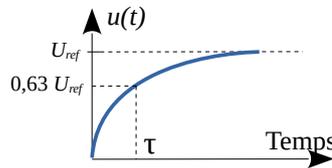
$RC \frac{du}{dt} + u = U_{ref}$ soit avec $\tau = RC$ $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{U_{ref}}{\tau}$

Solution homogène : $u_h(t) = A e^{-t/\tau}$ Solution particulière : $u_p = U_{ref}$

Solution générale : $u(t) = A e^{-t/\tau} + U_{ref}$

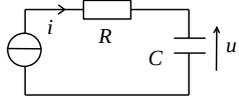
Or $u(0) = 0 = A + U_{ref}$ donc $A = -U_{ref}$

et finalement $u(t) = U_{ref}(1 - e^{-t/\tau})$



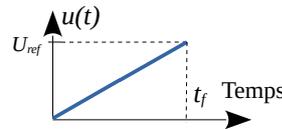
Charge avec un courant i constant :

On a $i = C \frac{du}{dt}$.



En intégrant on trouve :

$u(t) = \frac{it}{C}$ si le condensateur est initialement



déchargé.

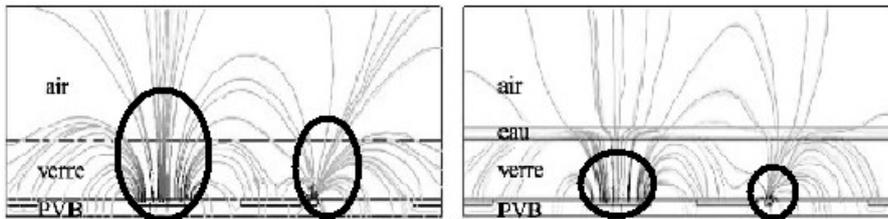
Comparaison :

Dans le premier cas U_{ref} est atteinte de manière asymptotique alors que dans le deuxième cas U_{ref} est atteinte en un temps fixé.

B.9. Pour mesurer C on peut réaliser un circuit RC série alimenté par un GBF (générateur basse fréquence) avec une tension crête à crête.

La mesure du temps de réponse à 63% $\tau = RC$, à l'aide d'un oscilloscope, permet de trouver C en connaissant R : $C = \tau/R$.

B.10. Le champ électrique est le plus intense là où les lignes de champ se resserrent (car en l'absence de charge le champ E est à flux conservatif) :



Problème 3 : Le near-field

1) Dans le cadre de l'ARQS,

l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit $\oint_{C_{fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enlacé}$,

l'équation de Maxwell flux s'écrit $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

2) **Symétries :** $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants. \vec{B} (M), devant être perpendiculaire à ce plan, est porté par \vec{u}_z .

Invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z, et par rotation selon θ : B ne dépend donc que de r. Finalement, $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$.

3).

Soit un contour d'Ampère rectangulaire bleu .Ce contour n'enlace aucun courant.

Par le théorème d'Ampère, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

$$\oint_{bleu} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r_A) * AB - B(r_C) * CD$$

AB = CD donc $B(r_A) = B(r_C)$ donc \vec{B} (M) est uniforme dans le solénoïde.

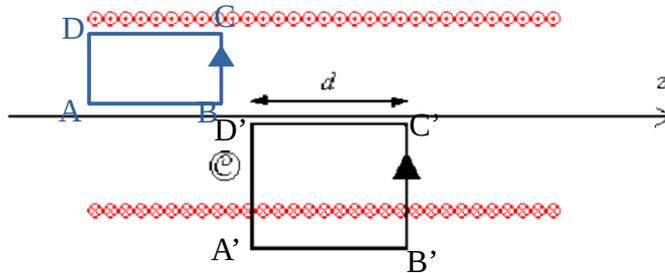
Pour le contour rectangulaire noir de longueur d

$$\oint_{bleu} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A'B'} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{B'C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C'D'} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{D'A'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B(r_C) * C'D' = -B * d \text{ car le champ}$$

magnétique est supposé nul à l'extérieur du solénoïde.

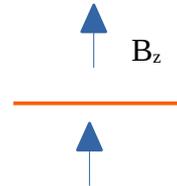
Le courant enlacé par ce contour valant $i_{enlacé} = -N(b/\ell)i(t)$,

D'après le théorème d'Ampère, $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{u}_z$



4)

- a) Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie des courants,
- b) Et donc un plan d'anti-symétrie du champ magnétique.
- c) Cette propriété se traduit par $B_z(-z) = B_z(z), \forall z$.



5) Avec $B_z(z) = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$ fonction paire de z $B_z(-z) = B_z(z), \forall z$ est vérifiée.

6)

Carte de champ du solénoïde :

- Le plan Π , passant par l'axe vertical de la carte de champ et perpendiculaire à celle-ci, est un plan d'antisymétrie des courants. Ce plan est donc un plan de symétrie du champ magnétique.
- Le plan Π^* , passant par l'axe horizontal de la carte de champ et perpendiculaire à cette dernière, est un plan de symétrie des courants, soit également un plan d'antisymétrie du champ magnétique.

Carte de champ de la bobine plate :

On retrouve les mêmes éléments de symétrie sur la carte de champ de la bobine plate.

7) Les lignes de champ se resserrent aux endroits où le champ magnétique est plus intense. Elles sont parallèles aux endroits où le champ magnétique est uniforme. Ces propriétés viennent de l'équation Maxwell-flux : le champ magnétique est à flux conservatif.

Transfert de puissance

8) $u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt}$

9) $P_{reçue} = u * i = R_1 i^2 + L_1 \frac{di}{dt} * i$

$$\langle P_{reçue} \rangle = \langle R_1 i^2 \rangle + \langle L_1 \frac{di}{dt} * i \rangle$$

avec $i = I_0 \cos \omega t$ $\langle i^2 \rangle = I_0^2 / 2$ et $\langle i * di/dt \rangle = \langle I_0^2 \omega \cos \omega t * \sin \omega t \rangle = 0$

$$\langle P_{reçue} \rangle = R_1 \frac{I_0^2}{2}$$

10)

a) $B_z(z) = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$ avec $z = d$ et $i = I_0 \cos \omega t$

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_0 a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \cos \omega t$$

Soit

$$B_0 = \frac{\mu_0 N_1 I_0 a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

b) $\Phi = B * N_2 S_2 = B_0 \cos \omega t * N_2 \pi b^2 = M i$ $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} * \pi b^2$

11) On met en évidence le phénomène d'induction

e vérifie la loi de Faraday : $e = \frac{-d\phi}{dt} = \omega B_0 \sin \omega t * N_2 \pi b^2$

12) La loi des mailles donne $e = R_2 i_2$ $i_2 = B_0 / R_2 * N_2 \pi b^2 \sin \omega t$

13)14) Par définition, $P_{géné} = e i_2 = R_2 i_2^2$ $\langle P_{géné} \rangle = (\omega B_0 * N_2 \pi b^2)^2 * I_0^2 / 2 R_2$

$$\langle P_{géné} \rangle = \frac{\left(\omega \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} * \pi b^2 \right)^2 * I_0^2}{2 R_2}$$

15) $\langle P_{reçue} \rangle = R_1 \frac{I_0^2}{2}$ et $\langle P_{géné} \rangle = \frac{\left(\omega \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} * \pi b^2 \right)^2 * I_0^2}{2 R_2}$

$$\eta = \frac{\left(\omega \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} * \pi b^2 \right)^2}{R_1 R_2} = \frac{\omega^2 \mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4}{(d^2 + a^2)^3 R_1 R_2} * \frac{\pi^2}{4} \quad \text{donc} \quad k = \frac{\pi^2}{4}$$

Vérifications expérimentales

16) $\eta_{max} = 0,075$, $f_{max} = 15000 \text{ Hz}$

17) Puisque $\omega = 2\pi f$, selon la relation trouvée, le rendement est proportionnel à f^2 .

Aux basses fréquences, η croît avec f (cette variation semble plutôt linéaire) ; aux hautes fréquences, η décroît avec f , en désaccord avec la relation.

