Équations de Maxwell

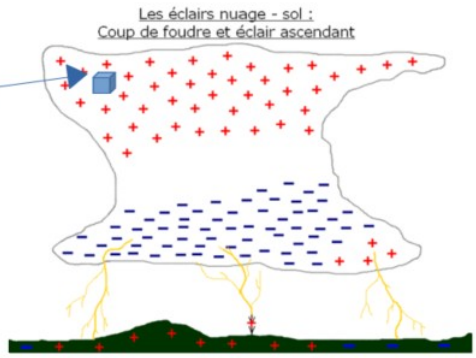
James Clerk Maxwell (13 juin 1831 à Édimbourg, en Écosse - 5 novembre 1879) était un physicien écossais qui a démontré que l'électricité et le magnétisme pouvaient être unifiés en un seul phénomène: l'électromagnétisme.
Il codifia les travaux antécédents de **Michael Faraday, d'André-Marie Ampère** et d'autres concernant l'électricité et le magnétisme, et les rassembla dans un ensemble de vingt équations différentielles,. Plus tard, **Heaviside, Poynting** et **Gibbs** mirent au monde l'outil vectoriel tel qu'il est encore utilisé .

Oliver Heaviside simplifia la théorie en réduisant à **quatre le nombre d'équations nécessaires.** Ce sont ces équations que l'on connaît maintenant sous le nom de ***équations de Maxwell*.**

Les lois de Maxwell décrivent le comportement des **champs électriques** et **magnétiques** et le rapport entre les deux, à savoir **l'induction** électromagnétique.
Les équations permettent l'existence d'une **onde électromagnétique** s'auto-propageant à la vitesse de la lumière, suggérant que la lumière soit en fait cette onde électromagnétique.
La validité de cette suggestion fut démontrée plus tard par les expériences de **Hertz** et était fondamentale pour l'invention de la radio, habituellement attribuée à Guglielmo Marconi.

La théorie de l'électromagnétisme de Maxwell contenait le germe de la relativité.

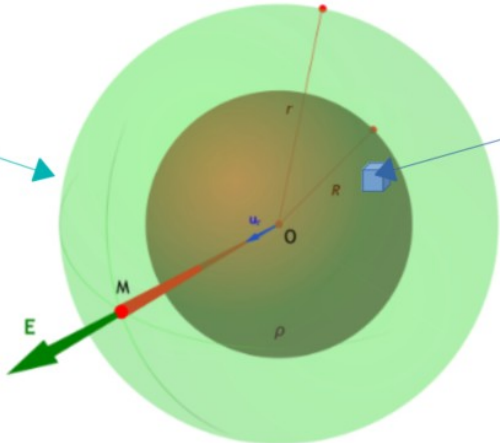
Échelles



Échelle macroscopique (milieu non homogène
Le milieu est non homogène
Pour l'étudier , on étudie en tt point
les champs scalaires(pression, température) et
les champs vectoriels (électriques, magnétiques)

Echelle mésoscopique
Equations fondamentales locales

1. **Equation de Maxwell -Gauss** $\boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$



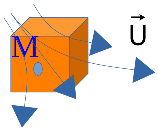
$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{intérieure}}{\epsilon_0} \longrightarrow \boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

L'équation de Maxwell-Gauss repose sur une analyse par unité de volume

<u>Outil mathématique : Opérateur divergence d'un vecteur</u> $\vec{U}$: div($\vec{U}$)

Cet outil permet de définir le flux à travers une toute petite surface fermée dite élémentaire

Autour de M point de l'espace , où règne le champ vectoriel $\vec{U}$, on définit un volume dτ (cube ici)



dϕ est le flux du champ vectoriel $\vec{U}$ à travers la surface fermée (enveloppe du petit cube)

$$\mathrm{div}(\vec{U}) = \frac{d\phi}{d\tau}$$

<u>Théorème de Gauss local</u>

L' espace étudié est chargé , sa densité volumique de charge est ρ

On peut écrire en considérant la surface du cube élémentaire : $\boxed{d\phi(\vec{E}) = \frac{\rho\, d\tau}{\epsilon_0}}$

ρdτ est bien la charge contenue dans le cube

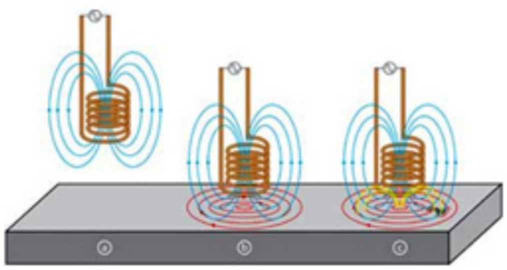
soit en divisant par dτ $\boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$

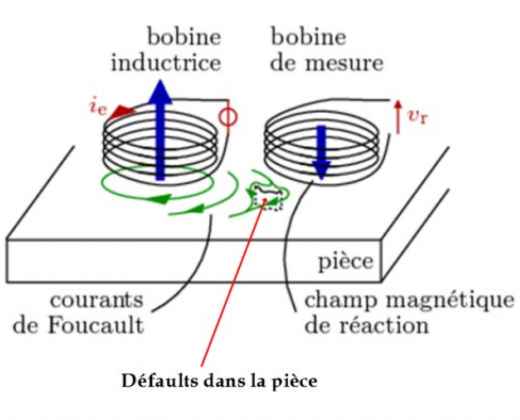
On peut montrer en coordonnées cartésiennes que $\boxed{\mathrm{div}(\vec{U}) = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}}$

2.Equation de Maxwell -Faraday

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Phénomène d'induction: courants de Foucault





La variation du champ magnétique dans le matériau conducteur entraîne l'apparition de courants électriques dit courants de Foucault.

La variation du champ magnétique provoque le déplacement des électrons libres(porteurs de charge négatifs) dans le matériau selon des boucles fermées

Or on sait que le déplacement des charges dans un conducteur est provoqué par la force créé par un champ électrique sur la charge : $\vec{f} = q\,\vec{E}$

La variation du champ magnétique provoque donc la création d'un champ électrique dans le matériau

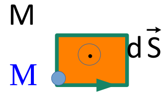
Variation de $\vec{B}(M,t)$ $\xrightarrow{\text{Couplage}}$ Création de $\vec{E}(M,t)$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Outil mathématique 1 : l'opérateur vectoriel rotationnel de $\vec{U}$: $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{U}$

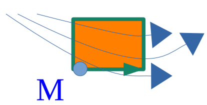
On considère une surface élémentaire(surface rectangulaire) au voisinage de M

entourée par une petite boucle



Soit **dC** la circulation du champ $\vec{U}$, le long de la boucle orientée(parcours fermé élémentaire) passant par le point M de l'espace étudié :

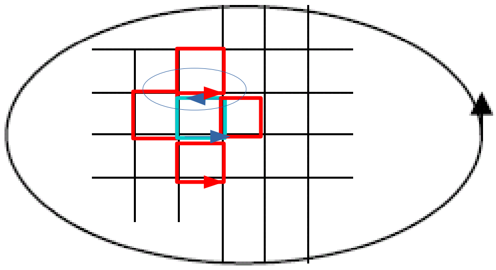
$$\mathbf{dC} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{U}\cdot d\vec{S}$$



Outil mathématique 2 : théorème de Stokes

$$dC_{boucle\ \ élémentaire} = \overrightarrow{rot}\,\vec{U}\,.\,d\vec{S}$$

$$\boxed{\int dC = \iint_{Sentouré\ par\, c} \overrightarrow{rot}\,\vec{U}\,.\,d\vec{S} = \oint \vec{U}\,.\,d\vec{l}}$$



Etablissement de la forme intégrale

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

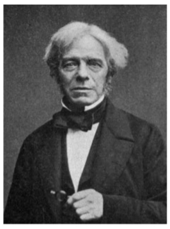
$$\iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{E}\,.\,d\vec{S} = \oint \vec{E}\,.\,d\vec{l}$$ théorème de Stokes

$$\boxed{\iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{E}\,.\,d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S}}$$

$$-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S} = \frac{-d\left(\iint_S \vec{B}(M,t)\,d\vec{S}\right)}{dt} = \frac{-d\phi}{dt}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}} \xrightarrow{\text{Forme intégrale}} \boxed{\oint \vec{E}\,.\,d\vec{l} = \frac{-d\phi}{dt}}$$

Loi de Faraday



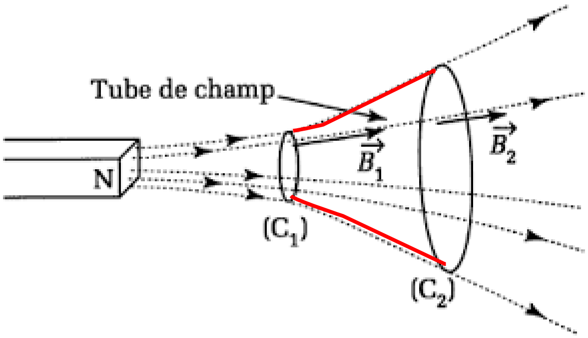
Dans un circuit fermé , la variation du flux du champ magnétique à travers la surface entouré par le circuit entraîne l'apparition d'une force électromotrice d'induction e . $\boxed{e = \frac{-d\phi}{dt}}$

De $\boxed{\oint \vec{E}\,.\,d\vec{l} = \frac{-d\phi}{dt}}$ on en déduit que **le champ électrique créé par la variation temporelle du champ magnétique** est liée à e par $\boxed{e = \oint \vec{E}(M,t)\,.\,d\vec{l}}$

3. Equation de Maxwell-flux $\boxed{\operatorname{div}(\vec{B})=0}$ ❤

Propriété(admise)

Le flux du champ magnétique sortant d'une surface fermée est toujours nul. **Le champ magnétique est dit à flux conservatif.** $\boxed{\oiint_S \vec{B}.d\vec{S}=0}$

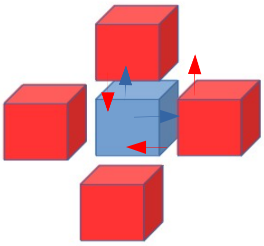


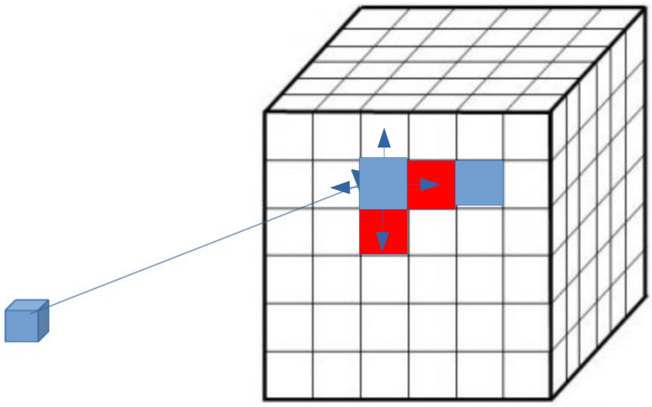
Conséquence **: Les lignes de champ sont d'autant plus resserrées que le champ magnétique est fort.**

$B_2S_2 - B_1S_1=0$ $B_1 > B_2$

Outil mathématique: théorème d'Ostrogradsky

Le flux du champ $\vec{U}$ à travers la surface fermée (enveloppe du petit cube élémentaire de volume dτ)s'écrit : **$d\Phi = \operatorname{div}(\vec{U})\, d\tau$**





$$\boxed{\iiint_{V\ enveloppé\ par\ S} \operatorname{div}(\vec{U})\, d\tau = \int d\phi = \oiint_S \vec{U}.d\vec{S}}$$

Equation de Maxwell-flux

$\boxed{\oiint_S \vec{B}.d\vec{S}=0}$ s'écrit $\boxed{\iiint_{V\ enveloppé\ par\ S} \operatorname{div}(\vec{B})\, d\tau=0}$ vérifié quel que soit le volume V ,

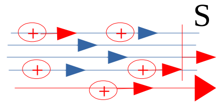
$$\boxed{\boxed{\operatorname{div}(\vec{B})=0} \text{ équation de Maxwell-Flux}}$$ ❤

4. Équation locale de la conservation de la charge : $\rho \longleftrightarrow \vec{j}$ $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}}$ à savoit établir

La charge électrique d'un système ne peut être ni créée ni détruite mais seulement échangée.

Si le système est isolé électriquement sa charge se conserve au cours du temps .

Rappel : i Intensité du courant traversant S débit de charges $i = \frac{\delta q_{traversant}}{dt} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Delta q_{traversant}}{t_2 - t_1}$

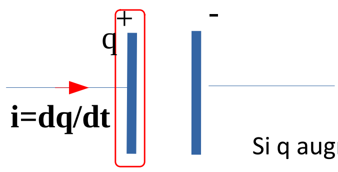


Vecteur j orienté dans le sens réel du courant

$\delta q_{traversant \Rightarrow}$ charge traversant S pendant dt selon le sens d'orientation →

$$\boxed{i(t) = \iint_{M \in S} \vec{j}(M,t).d\vec{S} = \frac{\delta q_{traversant \Rightarrow}}{dt}}$$

La charge d'un système chargé ne peut varier que par échange varie ne peut être due qu'aux flux de charges à travers les surfaces,



Si q augmente , i>0

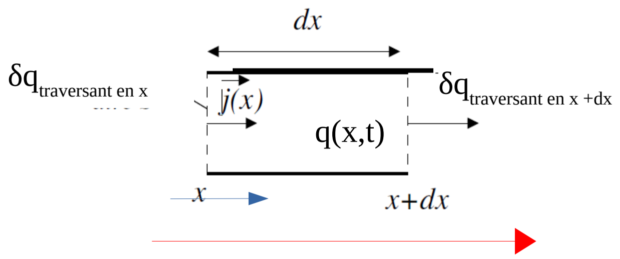
$q(t+dt) - q(t) = dq = \delta q_{traversant}$

Localement , on établit un bilan de charge:

On étudie l'évolution de la charge q(x,t) du volume

de contrôle

dτ = Sdx (répartie uniformément) pendant dt



$q(x,t+dt) - q(x,t) = [i_{entrant} - i_{sortant}]dt$

avec $q(x,t+dt) - q(x,t) = \frac{\partial q}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ dt Sdx

$q(x,t) = \rho(x,t)$ Sdx
Charge de la tranche x-x+dx à t

Avec $\boxed{i(t) = \iint_{M \in S} \vec{j}(M,t).d\vec{S} = \frac{\delta q_{traversant \Rightarrow}}{dt}}$ on peut écrire i= j(x,t) S, intensité en x à t

$[i_{entrant} - i_{sortant}]dt = [j(x,t) - j(x+dx,t)]$ Sdt $= -\frac{\partial j}{\partial x} dx\, Sdt$

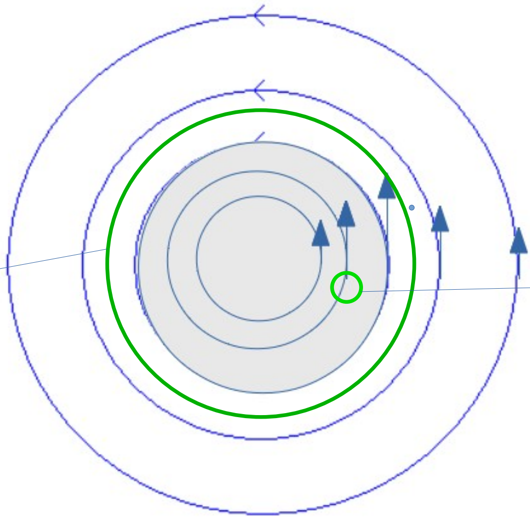
$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$dt Sdx $= -\frac{\partial j}{\partial x} dx$ S dt $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}}$ soit $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}}$

5. Relation de Maxwell-Ampère

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

5.1 Régime stationnaire

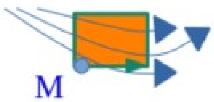
$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{j}}$$



$$\boxed{\oint_C \vec{B}\,d\vec{l}=\mu_0\,i_{enlacés}}$$

Outil mathématique:opérateur rotationnel d'un champ vectoriel

$$dC=\overrightarrow{rot}\,\vec{U}.d\vec{S}$$



Théorème d'Ampère local : dC $_{\text{boucle élémentaire}}$ = μ_0 $\vec{j}.d\vec{S}$

Equation de Maxwell Ampère

$$dC_{boucle\ \ élémentaire}=\overrightarrow{rot}\,\vec{B}.d\vec{S}=\mu_0\,\vec{j}.d\vec{S}$$ **soit** $$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{j}}$$

5.2 En régime variable

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

MG $\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$, outil $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}\right)=0$

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}\right)=\mu_0\left(\operatorname{div}\vec{j}\right)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\left(\operatorname{div}\vec{E}\right)}{\partial t}$$

$$\boxed{0=\mu_0\left(\operatorname{div}\vec{j}\right)+\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

6. Bilan

6.1 Equations de Maxwell

$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ équation de Maxwell -Gauss

$\mathrm{div}(\vec{B})=0$ Equation de Maxwell Flux

$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Equation de Maxwell_Faraday

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Equation de Maxwell Ampère

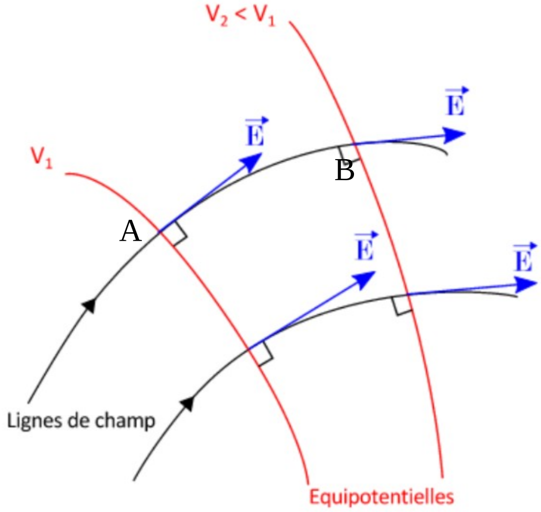
6.2 Bilan : En régime stationnaire

$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ équation de Maxwell -Gauss

$\mathrm{div}(\vec{B})=0$ Equation de Maxwell Flux

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ Equation de Maxwell Ampère

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ donne $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}}$



$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

$\vec{E}$ orienté selon les potentiels décroissants

$\vec{E}$ localement orthogonal à l'équipotentiellele

et

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$$

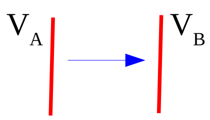
Entre deux points voisins M,M' quelconques

$\vec{E}$ ne varie pas $V_M - V_M{}' = \vec{E}.\overrightarrow{MM'}$

Si M et M' sont deux points de l'équipotentielle , $V_M = V_{M'}$

$\boxed{0 = \vec{E}.\overrightarrow{MM'}}$ **cqfd**

Champ uniforme (condensateur infini)



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l} = \vec{E}.\overrightarrow{AB}$$

Entre deux points voisins M,M' quelconques

$\vec{E}$ ne varie pas $\boxed{V_M - V_M{}' = \vec{E}.\overrightarrow{MM'}}$

Si M et M' sont deux points de l'équipotentielle , $V_M = V_{M'}$ $\boxed{0 = \vec{E}.\overrightarrow{MM'}}$ **cqfd**

Equation de Poisson, équation de Laplace ΔV $\boxed{\Delta V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}}$ **outil** $\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}() = \Delta()$

7,Equation de Maxwell dans le vide: Equation de d'Alembert

Équations dans le vide:dans le vide ρ=0 , j=0

$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 0}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$ $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

Déterminer les équations vérifiées par le champ électrique, par le champ magnétique

outil $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$ $\qquad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = -\vec{\Delta}\vec{E}$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = -\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial \overrightarrow{rot}\,\vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial()}{\partial t \partial x} = \frac{\partial()}{\partial x \partial t}$$

$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\Delta}\vec{E}}$ **équation de propagation de d'Alembert avec** $\boxed{\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1}$ **soit**

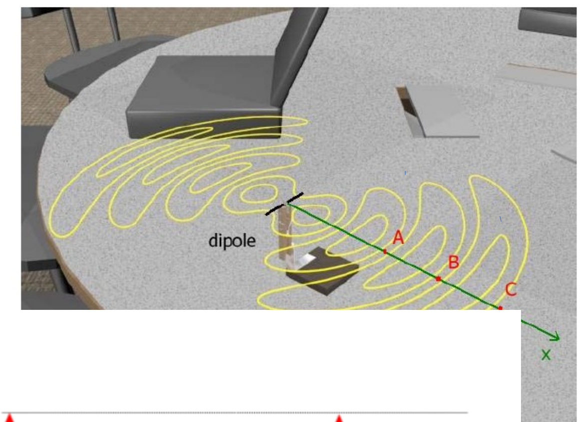
$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \Delta E_y}$ **pour une onde transversale polarisée selon y**

De même

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = \overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{B}) - \vec{\Delta}\vec{B}$ $\qquad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = -\vec{\Delta}\vec{B}$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial \overrightarrow{rot}\,\vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$ **soit** $\boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{\Delta}\vec{B}}$

$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 0}$, $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$

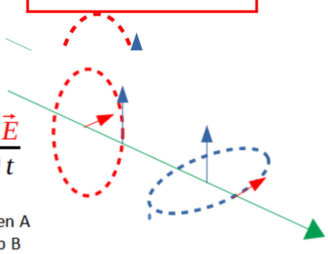


Relations de couplage entre les deux champs :

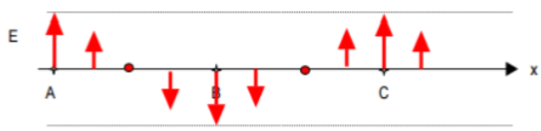
ONDE EB !!!

$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$



La variation dans le temps de E en A crée au voisinage de A un champ B



La variation dans le temps de B en C crée au voisinage de C un champ E