DEVOIR LIBRE N°01

2TSI-MATHÉMATIQUES

A rendre le jeudi 19 septembre 2024 au plus tard

Les différents exercices sont indépendants, de poids inégaux et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $\begin{cases} 0 < u_0 < 1, & 0 < u_1 < 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right) \end{cases}$.

On pose aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \min(u_n,\, u_{n+1})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $\sqrt{x} \geqslant x$.
3. (a) On suppose un entier n tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Montrer que $u_{n+2} \geqslant u_n$ et en déduire que $v_{n+1} \geqslant v_n$.
   (b) On suppose un entier n tel que $u_n \geqslant u_{n+1}$.
   Montrer que $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$ et comparer v_{n+1} et u_{n+1} puis v_{n+1} et v_n.
   (c) Que peut-on dire des variations de (v_n) ?
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in]0, 1]$.
5. (a) On suppose un entier n tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Montrer que $\sqrt{v_n} \leqslant u_{n+2}$ et que $u_{n+3} \geqslant \sqrt{u_n}$.
   En déduire que $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.
   (b) On suppose un entier n tel que $u_n \geqslant u_{n+1}$. Montrer que $\sqrt{v_n} \leqslant u_{n+2}$ et que $u_{n+3} \geqslant \sqrt{u_{n+1}}$.
   En déduire encore que $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.
6. Montrer que $l = 1$.
7. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 02

On pose $f : x \mapsto \arcsin(2x-1) + 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

1. Calculer $f(1)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de

$$f_1 : x \mapsto \arcsin(2x-1) \text{ et de } f_2 : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

   En déduire le domaine de définition I de f.
3. On désire montrer que f est constante sur I.
   (a) **Première méthode**.
   Déterminer les dérivées des fonctions f_1 et f_2 sur $]0, 1[$. En déduire celle de f. Conclure.
   (b) **Deuxième méthode**.
   Soit $x \in I$, on pose $x = \cos^2\alpha$. Justifier l'existence de α.
   Pourquoi peut-on se restreindre à $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$? On fera ce choix dans la suite.
   Simplifier $f_1(x)$ et $f_2(x)$ en fonction de α. Retrouver alors le résultat de la première méthode.