Correction DL N°01

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
Initialisation $u_0 \in]0,1[$ et $u_1 \in]0,1[$.
Transmission Supposons $n \geqslant 0$ et $u_n \in]0,1[$ et $u_{n+1} \in]0,1[$. Alors $u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right)$ et

$$\left[0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{u_n} < 1 \text{ et } 0 < u_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{u_{n+1}} < 1\right] \Rightarrow 0 < \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} < 2$$

$$\Rightarrow u_{n+2} \in]0,1[.$$

2. Pour tout $x \in]0,1[$, $\sqrt{x} \geqslant x \Leftrightarrow x \geqslant x^2 \Leftrightarrow x - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x(1-x) \geqslant 0$.
Comme x et $1-x$ sont positifs, on a bien le résultat.

3-a Supposons $u_n \leqslant u_{n+1}$. Alors $v_n = \min(u_n,\, u_{n+1}) = u_n$. De plus,

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + u_n\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(u_n + u_n\right) = u_n.$$

Donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2})$ qui vaut soit $u_{n+1} \geqslant u_n$, soit $u_{n+2} \geqslant u_n$ et dans tous les cas,

$$v_{n+1} \geqslant u_n = v_n.$$

3-b Supposons $u_{n+1} \leqslant u_n$. Alors $v_n = \min(u_n,\, u_{n+1}) = u_{n+1}$.
De plus,

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + u_n\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + u_{n+1}\right) = u_{n+1}.$$

Donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) = u_{n+1} = v_n$.

3-c Conclusion : la suite $(v_n)_n$ est croissante car dans tous les cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geqslant v_n$.

4. La suite $(v_n)_n$ est bornée car appartient à $]0,1[$.
De plus, elle est croissante donc convergente vers $l \in]0,1]$.

5-a Supposons $u_n \leqslant u_{n+1}$. Alors $\sqrt{v_n} = \sqrt{u_n}$. Or,

$$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \Rightarrow u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}(2\sqrt{u_n}) = \sqrt{u_n}.$$

Et donc $\sqrt{v_n} \leqslant u_{n+2}$.
De même, comme $u_{n+2} \geqslant u_n$ et donc $\sqrt{u_{n+2}} \geqslant \sqrt{u_n}$, on a :

$$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \Rightarrow u_{n+3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+2}} + \sqrt{u_{n+1}}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_n}\right) = \sqrt{u_n}.$$

Donc $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_n} = \sqrt{u_n}$. Enfin, $v_{n+2} = \min(u_{n+3}, u_{n+2})$ qui vaut soit $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_n}$ soit $u_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.
Donc dans tous les cas, $v_{n+1} \geqslant \sqrt{v_n}$.

5-b Supposons $u_n \geqslant u_{n+1}$. Alors $\sqrt{v_n} = \sqrt{u_{n+1}}$. Or,

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}(2\sqrt{u_{n+1}}) = \sqrt{u_{n+1}}.$$

Et donc $\sqrt{v_n} \leqslant u_{n+2}$.
De même, comme $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$ et donc $\sqrt{u_{n+2}} \geqslant \sqrt{u_{n+1}}$, on a :

$$u_{n+3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+2}} + \sqrt{u_{n+1}}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_{n+1}}\right) = \sqrt{u_{n+1}}.$$

Donc $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_n}$. Enfin, $v_{n+2} = \min(u_{n+3}, u_{n+2}) \geqslant \sqrt{v_n}$.

6. Partons de pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$ et comme (v_n) tend vers l, par continuité de $\sqrt{\ }$,

$$l \geqslant \sqrt{l} \Rightarrow l \geqslant 1.$$

Comme $l \leqslant 1$, $l = 1$.

7. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n \leqslant 1$ et d'après le théorème des Gendarmes, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$, on a bien : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 02

1. On a : $f(1) = \arcsin 1 + 2 \arctan 0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \arcsin 0 + 2 \arctan 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. • f_1 est définie si et seulement si $2x - 1 \in [-1, 1]$ donc pour $x \in [0, 1]$. C'est le domaine de définition de f_1.

• f_2 est définie si et seulement si $\dfrac{1-x}{x} \geqslant 0$ et $x \neq 0$.

1er cas : $x > 0$ et alors $1 - x \geqslant 0$ ce qui donne $x \in]0, 1]$.

2e cas : $x < 0$ et alors $1 - x \leqslant 0$ et donc $x \geqslant 1$. Alors $x \in \emptyset$.

Ainsi le domaine de définition de f_2 est $]0, 1]$.

• Le domaine de définition de f est $I = [0, 1] \cap]0, 1] =]0, 1]$.

3-a Comme $(\arcsin u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$ avec $u(x) = 2x - 1$, on a :

$$\forall x \in]0, 1[,\ f_1'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}.$$

De même, $(\arctan v(x))' = \dfrac{v'(x)}{1 + v^2(x)}$ avec $v(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

Et $v'(x) = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \times \left(\dfrac{1-x}{x}\right)' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x - x^2}}$. Alors :

$$\forall x \in]0, 1[,\ f_2'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x - x^2}} \times \frac{1}{1 + \dfrac{1-x}{x}} = -\frac{x}{2x\sqrt{x - x^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

Donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ et donc f est constante sur $]0, 1[$. Par continuité, elle l'est aussi sur I et d'après **1**, cette constante est $\frac{\pi}{2}$.

3-b Comme $x \in]0, 1]$, x peut s'écrire $\cos^2 \alpha$.

De plus, pour $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a bien $\cos^2 \alpha \in [0, 1[$. Alors :

$$f_1(\cos^2 \alpha) = \arcsin(2\cos^2 \alpha - 1) = \arcsin(\cos 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(2\alpha)) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

car $2\alpha \in [0, \pi]$. Puis :

$$f_2(\cos^2 \alpha) = 2 \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \arctan \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \arctan \sqrt{\tan^2 \alpha} = 2 \arctan |\tan \alpha| = 2\alpha$$

car $\tan \alpha \geqslant 0$ et $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Il reste à écrire $f(x) = f_1(\cos^2 \alpha) + f_2(\cos^2 \alpha) = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.