CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES

Colle 04

Du 07 Octobre 2024 au 11 Octobre 2024

1) Notion des polynômes à une indéterminée.
Révision de la colle 03.

2) Début de l'Algèbre linéaire

Les matrices : rappels de TSI1. Matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, matrices triangulaires, diagonales, somme de matrices, produit de matrices, le produit de deux matrices peut être nul sans que les deux matrices soient nulles. Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.
Lien fondamental avec les systèmes linéaires de n équations à p inconnues. Notation $AX = B$.
Opérations élémentaires sur les matrices et application à la résolution de systèmes linéaires.
Matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **Transposée d'une matrice** et propriétés de la transposée. Puissances d'une matrice, **inverse d'une matrice carrée inversible**, trace d'une matrice, formule du binôme de Newton pour des matrices carrées commutables. Ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques.
Lien entre les matrices inversibles et les systèmes : $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Les espaces vectoriels et les sous-espaces vectoriels : rappels de TSI1. (**On passe sous silence la définition générale d'un espace vectoriel et les lois tordues sont à proscrire**.) Sous-espaces vectoriels, exemples, sous-espace vectoriel engendrée par une famille de vecteurs.

Les familles de vecteurs : familles libres, génératrices, bases, familles liées, dimension, $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Rang d'une famille de vecteurs, somme directe de **deux** sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires. Exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule de Grassmann. En dimension n, une famille libre de n éléments est une base.

Extension aux sommes de plus de deux sous-espaces vectoriels, somme directe de plus de deux espaces vectoriels.

Warnung : Cette semaine, pas encore d'exercices portant sur les applications linéaires et leur lien avec les matrices, ni bien entendu d'utilisation des déterminants.

Le colleur vérifiera la maîtrise ou l'acquisition de certains des points suivants (en question de cours ou dans un exercice) :

Compétences à acquérir :

Sur les matrices :

1) Savoir faire des produits de deux, trois, etc. matrices.
2) Savoir résoudre un système linéaire avec des opérations élementaires sur les lignes.
3) Savoir inverser une matrice soit en inversant un système linéaire, soit par Gauβ-Jordan, soit avec un polynôme annulateur fourni.
4) Savoir calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice, par exemple avec la formule du binôme de Newton ou par réccurrence.
5) Connaître les propriétés de la transposée d'une matrice carrée.

Sur les espaces vectoriels :

1) Connaître les espaces vectoriels usuels avec leurs lois
(vecteurs du plan, de l'espace, suites, fonctions, polynômes).
2) Savoir montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
3) Savoir ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels.
4) Connaître la dimension et trouver la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}_n[X]$.
5) Trouver une base d'un sous-espace vectoriel défini par une équation.
6) Savoir montrer qu'une famille finie ou non est libre.
7) Extraire une base d'une famille génératrice.
8) Savoir user de la formule de Graβmann.
9) Savoir montrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels (ou au moins une inclusion) en utilisant notamment des bases.
9) Montrer que n sous-espaces vectoriels sont en somme directe (dans des cas simples).