Correction DS N°01

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.
On rappelle que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et on pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Partie A - Lieux de points

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \dfrac{1}{3}(-3 + 2i\sqrt{3})$.
Calculons $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrons que les points A, B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral.

On a rapidement : $f(a) = 0$, $f(b) = 2$, $f(c) = i\sqrt{3} + 1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.
On a immédiatement $AB = AC = BC = 2$ et l'angle entre $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ est $\pi/3$. Ainsi, (ABC) forme un triangle équilatéral.

2. Écrivons le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.

Il s'agit des $z \neq -1$ tels que $|z-1| = |z+1|$. Si $D(1)$ et $E(-1)$ alors M parcourt la médiatrice du segment $[D, E]$.
On peut le retrouver par le calcul : $|z-1| = |z+1| \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$.
C'est $i\,\mathbb{R}$.

3. Écrivons le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.

On s'inspire du développement précédent :
$|z-1| = \sqrt{2}|z+1| \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 2(z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$.
Pour ceux qui connaissent, il s'agit du cercle : $(x+3)^2 + y^2 = 8$ soit le cercle de centre $(-3, 0)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

Partie B - Étude d'une suite récurrente

1-a. • Montrons que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution.

En effet, sinon, $z - 1 = z + 1$ et donc $-1 = 1$, ce qui est absurde.

• Montrons que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution, que l'on exprimera en fonction de ω.

On écrit : $f(z) = \omega \Leftrightarrow z - 1 = \omega(z+1) \Leftrightarrow z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$.

1-b. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?

La valeur 1 n'est pas atteinte et f n'est pas surjective. Par contre, la restriction de f de $\mathbb{C}\setminus\{-1\} \to \mathbb{C}\setminus\{1\}$ est bijective. Par conséquent, f est bien injective.

1-c. Montrons que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On a : $f(z) = -1 \Leftrightarrow z = 0$ et $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$. Et -1 ne sera jamais atteint. Ainsi, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

2. Dans la suite, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

2-a. Résolvons l'équation $f(z) = z$.

C'est-à-dire $\dfrac{z-1}{z+1} = z$ ou encore $z^2 = -1$ et donc $z = \pm i$.

2-b Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?

On a $f(-i) = -i$ et $f(i) = i$ donc si $u_0 = i$, (u_n) est la suite constante de valeur i et si $u_0 = -i$, (u_n) est la suite constante de valeur $-i$.

2-c Si $u_0 \notin \{-i, i\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.
En effet, d'après la question précédente, l'image réciproque $f^{-1}(i)$ est $\{i\}$ et l'image réciproque $f^{-1}(-i)$ est $\{-i\}$.
On a : $u_0 \notin \{-i, i\} \Leftrightarrow u_1 = f(u_0) \notin \{-i, i\}$.
Par récurrence, $u_0 \notin \{-i, i\} \Leftrightarrow u_n = f(u_{n-1}) \notin \{-i, i\}$.

3-a Démontrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.

On écrit : $v_{n+1} = \dfrac{u_n - i}{u_n + i} = \dfrac{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} - i}{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} + i} = \dfrac{-i(u_n - i) + u_n - i}{i(u_n + i) + u_n + i}$.

Ou encore : $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 1 - iu_n - i}{u_n - 1 + iu_n + i} = \dfrac{(u_n - i)(1 - i)}{(u_n + i)(1 + i)} = v_n \dfrac{1 - i}{1 + i} = -iv_n$.

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.

3-b Montrons que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.

En effet, $v_1 = -iv_0$, $v_2 = -v_0$, $v_3 = iv_0$, $v_4 = v_0$. Par récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v_{4p+1} = -iv_0$, $v_{4p+2} = -v_0$, $v_{4p+3} = iv_0$ et $v_{4p+4} = v_0$.
Enfin, si l'on prend v_0 (qui est non nul), iv_0 est déduit de v_0 par une rotation d'angle $\pi/2$, puis $-v_0$ est issue de iv_0 par la même rotation et enfin $-iv_0$ toujours par la même rotation. Les quatre points associés sont bien les sommets d'un carré.

3-c Montrons que la suite (u_n) est également périodique de période 4.

On a : $u_n = i\dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$. Et comme (v_n) prend quatre valeurs, il en est de même de (u_n) qui a la même période.

EXERCICE 02

1. Soit f la fonction : $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. On a immédiatement $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x \times \frac{1}{2} \times 2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)(x-1) - x\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x \times \frac{1}{2} \times 2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)(x-1) - x(x^2+1)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{\left((x^2+1) + x^2\right)(x-1) - x(x^2+1)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\left(2x^2+1\right)(x-1) - x^3 - x}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}.$$

On pose $\phi(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

2. On remarque que $\phi'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$ qui s'annule en $x = 0$ et $x = \frac{4}{3}$. Donc $\phi'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 4/3[$. ϕ est croissante sur $]-\infty, 0[$ à valeurs dans $]-\infty, -1[$ puis décroit sur $[0, 4/3]$ et à valeurs dans $[-1, \phi(4/3)]$ puis croit sur $[4/3, +\infty[$ et à valeurs dans $[\phi(4/3), +\infty[$.
D'après le T.V.I, ϕ s'annule une et une seule fois en $\alpha \in]2, 3[$ car $\phi(2) = -1 < 0$ et $\phi(3) = 8 > 0$.
Finalement, ϕ est à valeurs négatives sur $]-\infty, \alpha[$ et à valeurs positives sur $[\alpha, +\infty[$.
Et f' a le signe de ϕ.
Alors f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En passant $f(0) = 0$. Puis f est strictement décroissante sur $]1, \alpha]$ et à valeurs dans $]+\infty, f(\alpha)]$ puis est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$ et à valeurs dans $[f(\alpha), +\infty[$.
En passant, $f(\alpha) = \dfrac{\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha - 1} > 0$.

3. Écrivons le développement limité de f en 0.

Le DL à l'ordre 2 suffit pour avoir la tangente et la position de Γ_f par rapport à cette tangente.
On sait que :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \Rightarrow f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x-1}$$

$$= -\left(x + \tfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right).$$

En développant, $f(x) = -x - x^2 + o(x^2)$.
En conclusion, $y = -x$ est la tangente et elle est au dessus de Γ_f.
Remarque : comme $f'(0) = -1$ et $f(0) = 0$, on a l'équation $y = -x$ sans DL. Mais si l'on a envie d'avoir la position locale de cette tangente, il faut faire le DL.
4. Faisons un développement limité généralisé de f en $+\infty$ pour trouver les réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand x tend vers $+\infty$.
On pose $t = 1/x$ et :

$$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{\frac{1}{t}-1} = \frac{\frac{1}{t}\times\frac{1}{t}\sqrt{t^2+1}}{\frac{1}{t}-1} = \frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{1-t}.$$

Il reste à passer à un DL en $t = 0$.

$$\frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{1-t} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right).\left(1 + t + t^2 + o(t^2)\right).$$

Il reste :

$$f(x) = \frac{1}{t}\left(1 + t + \frac{3}{2}t^2 + o(t^2)\right) = \frac{1}{t} + 1 + \frac{3}{2}t + o(t).$$

Et donc :

$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a : $a = b = 1$ et $c = 3/2$.
En conclusion, $y = x + 1$ est asymptote oblique à Γ_f qui reste au dessus de son asymptote car $3/(2x)$ tend vers 0^+ quand x tend vers $+\infty$.
Remarque : Procédons de façon similaire quand x tend vers $-\infty$. On pose encore $x = 1/t$.

$$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{\frac{1}{t}-1} = \frac{\frac{1}{t}\times\frac{-1}{t}\sqrt{t^2+1}}{\frac{1}{t}-1} = -\frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{1-t}.$$

On obtient l'opposé du DL de **4.** On a :

$$f(x) = -x - 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En conclusion, $y = -x - 1$ est asymptote oblique à Γ_f qui reste au dessus de son asymptote car $-3/(2x)$ tend vers 0^+ quand x tend vers $-\infty$.