Correction DL N°02

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

1. On a : $\Delta = -3 < 0$ et les solutions sont $\dfrac{-1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On reconnaît j et $\bar{j}$.
2. Donc $1 + j + \bar{j} = 1 + j + j^2 = 0$. De plus, $\bar{j} = j^2$ et $\bar{j} = -1 - j$ et $-1 - \bar{j} = j$.
3. Pour $P = X^2 + X + 1$, $P(X^2) = X^4 + X^2 + 1$ et

$$P(X)P(X-1) = (X^2 + X + 1)((X-1)^2 + X - 1 + 1) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) = X^4 + X^2 + 1.$$

4. Déjà le poynôme nul vérifie (E). Puis si $P = a_0 \neq 0$, $P(X^2) = a_0$ et $P(X)P(X-1) = a_0^2$. Alors :

$$a_0^2 = a_0 \Rightarrow a_0 = 1.$$

En conclusion, seuls les polynômes constants égaux à 0 ou 1 sont solutions de (E).
5. Si P est de degré 0, alors $P = 1$. C'est réglé.
Supposons $n \geqslant 1$ et posons $P = a_n X^n + Q_n$ avec Q_n de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $a_n \neq 0$. Alors $P(X^2) = a_n X^{2n} + Q_n(X^2)$. Et $Q_n(X^2)$ est de degré au plus $2n-2$. Puis

$$P(X)P(X-1) = (a_n X^n + Q_n(X))(a_n(X-1)^n + Q_n(X-1)) = a_n^2 X^{2n} + Z_n(X),$$

où Z_n est de degré au plus $2n-1$. En identifiant, $a_n = a_n^2$ et donc $a_n = 1$.
6. Supposons α une racine de P avec $\deg P \geqslant 1$. Comme $P(\alpha) = 0$, on a $P(\alpha^2) = 0$ et donc α^2 est une racine de P.
Si l'on suppose que α^{2^n} est une racine de P, alors $\left(\alpha^{2^n}\right)^2 = \alpha^{2^{n+1}}$ aussi. D'où le résultat.
7. Si α est une racine de P de module différent de 0 et de 1, comme α^{2^n} est une racine de P, pour tout n, nécessairement ce nombre de racines est fini (au plus le degré de P.) Or les modules des complexes α^{2^n} sont alors tous différents, ce qui est absurde. Dons soit $\alpha = 0$ soit α est de module 1.
Par contre si P est nul, tous les complexes sont alors racines.
8. Si l'on pose $x = 1 + \alpha$, $P(x^2) = P((1+\alpha)^2) = P(1+\alpha)P(\alpha) = 0$ donc $(1+\alpha)^2$ est encore une racine de P. Donc, $1 + \alpha = 0$ ou $|1+\alpha| = 1$. Alors soit $\alpha = 1$, soit :

$$|1+\alpha|^2 = (1+\alpha)(1+\bar{\alpha})^2 = 1 + \alpha + \bar{\alpha} + |\alpha|^2 = 1 \Rightarrow \alpha + \bar{\alpha} = -1$$

si $|\alpha|^2 = 1$. Alors $\alpha = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et c'est j ou $\bar{j}$.
En conclusion, les racines de P sont 0, -1, j et $j^2 = \bar{j}$.
9. On peut remarquer d'après la question précédente que si P une solution non nulle de (E) alors elle est de la forme $P = X^{n_1}(X+1)^{n_2}(X-j)^{n_3}(X-\bar{j})^{n_4}$, où n_1, n_2, n_3 et n_4 sont quatre entiers naturels éventuellements nuls. Il s'agit maintenant d'identifier $P(X^2)$ et $P(X)P(X-1)$. D'une part,$P(X^2)$ vaut :

$$X^{2n_1}(X^2+1)^{n_2}(X^2-j)^{n_3}(X^2-\bar{j})^{n_4}.$$

D'autre part, $P(X-1)P(X)$ vaut :

$$X^{n_1}(X+1)^{n_2}(X-j)^{n_3}(X-\bar{j})^{n_4}(X-1)^{n_1}X^{n_2}(X-1-j)^{n_3}(X-1-\bar{j})^{n_4}.$$

C'est-à-dire :

$$X^{n_1}(X+1)^{n_2}(X-j)^{n_3}(X-\bar{j})^{n_4}(X-1)^{n_1}X^{n_2}(X+\bar{j})^{n_3}(X+j)^{n_4}.$$

Ou encore :

$$X^{n_1+n_2}(X+1)^{n_2}(X-1)^{n_1}(X-j)^{n_3}(X+j)^{n_4}(X-\bar{j})^{n_4}(X+\bar{j})^{n_3}.$$

. Or, $j^2 = \bar{j}$ et $\bar{j}^2 = j$. On en déduit que :

$$(X^2-j)^{n_3} = (X^2-\bar{j}^2)^{n_3} = (X-\bar{j})^{n_3}(X+\bar{j})^{n_3} \text{ et } (X^2-\bar{j})^{n_4} = (X^2-j^2)^{n_4} = (X-j)^{n_4}(X+j)^{n_4}.$$

En identifiant, $2n_1 = n_1 + n_2$, $n_2 = n_1 = 0$ et$n_3 = n_4$.
Il reste les polynômes de la forme : $P = (X^2+X+1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 02

1. g est dérivable car c'est la somme et le produit de fonctions dérivables sur $[a, b]$.
Par ailleurs, $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$ car $f(a) = f'(a)$, $f(b) = f'(b)$.

2. Alors pour tout $x \in [a, b]$, $g'(x) = (f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x))e^x = (f''(x) - f(x))e^x$.
On utilise le théorème de Rolle. Comme g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$ donc sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$g'(c) = 0 \Rightarrow (f''(c) - f(c))e^c = 0 \Rightarrow f''(c) = f(c).$$