2TSI. Devoir surveillé N°01

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Samedi 28 Septembre 2024

Les différents exercices sont indépendants, de poids inégaux et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Les calculettes sont interdites.

EXERCICE 01

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\},\ f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

On rappelle que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et on pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Partie A - Lieux de points

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \dfrac{1}{3}(-3 + 2i\sqrt{3})$.
   Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A, B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral (on pourra mettre $f(c)$ sous forme trigonométrique).
2. Écrire le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
   (On posera $z = x + iy$ et on trouvera une égalité utilisant x et (ou) y.)
3. Écrire le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.
   (On posera $z = x + iy$ et on trouvera une égalité utilisant x et (ou) y.)

Partie B - Étude d'une suite récurrente

1. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution, que l'on exprimera en fonction de ω.
   (b) La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
   (c) Montrer que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
2. Dans la suite, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.
   (b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?
   (c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.
3. On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -i, i\}$, et on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}.$$
   D'après la question précédente, la suite (v_n) est bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n \neq -i$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.

T.S.V.P $\rightarrow$

EXERCICE 02

Soit f la fonction : $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f. Écrire la dérivée $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ sous la forme

$$\frac{\phi(x)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}},$$

   où ϕ est un polynôme que l'on précisera.

   Indication : *On trouvera* $\phi(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, *où* α *et* β *sont des réels à préciser.*

2. On note α la racine de ϕ supérieure à 2. Faire le tableau de variation de ϕ et de f.
   Quel est le signe de $f(\alpha)$?
3. Écrire le développement limité de f en 0.
   En déduire une équation de la tangente T_0 au graphe Γ_f de f en $(0,\ f(0))$.
4. En utilisant un développement limité généralisé de f en $+\infty$, trouver les réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

   quand x tend vers $+\infty$.
   En déduire la position de la droite $y = ax + b$ par rapport à Γ_f.