Devoir libre 03. TSI2
CORRECTION

EXERCICE 01

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels.
On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A Étude de l'endomorphisme associé à A

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_l, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

1. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ est évidemment A.
2. Calculons le rang de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
On part de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et par exemple les opérations élémentaires successives :

$$L_3 \leftarrow L_2 + L_3,\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2,\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

donne : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de rang 3.
Alors les trois colonnes sont une base de $\mathrm{Im}\, f$ et donc f est surjectif.
3. • Déterminons le noyau de l'endomorphisme f.
On peut résoudre le système $AX = 0$ mais c'est idiot. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Rg}\, f = 3 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{(0,0,0)\}.$$

Ainsi f est injectif. Et donc f est bijectif.
4-a On pose $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ et les vecteurs $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$.
On va montrer que F est un Vect et on démontre ainsi directement que F est un sous-espace et on aura sa dimension.

$$(x,y,z) \in F \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z & = x \\ -x - y - z & = y \\ x + 2y + 2z & = z \end{cases} \Rightarrow x + 2y + z = 0.$$

Et donc :

$$(x,y,z) \in F \Rightarrow (x,y,z) = (x, y, -x - 2y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-2).$$

Donc $F = \mathrm{Vect}\,((1,0,-1),\,(0,1,-2))$. Et F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 car $((1,0,-1),\,(0,1,-2))$ est clairement une famille libre.
4-b Les vecteurs e'_1 et e'_2 sont dans F car leurs composantes vérifient $x + 2y + z = 0$. Comme cette famille (e'_1, e'_2) est libre, et comme $\dim F = 2$, elle forme une base de l'espace vectoriel F.

5-a $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On montre rapidement qu'elle est de rang 3.
5-b Écrivons $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e_1)$ en fonction des éléments de $\mathcal{B}'$.
Déja, $f(e'_1) = e'_1$ et $f(e'_2) = e'_2$ car ces deux vecteurs sont dans F.
Puis $f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 = e'_2 + e_1$ car $e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$.

Alors la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5-c La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Son inverse peut se déterminer par Gauss-Jordan ou en inversant $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X = X'$, on trouvera :

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Retrouvons l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ en utilisant ces matrices de passage. Après calculs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie B Étude d'une suite de matrices

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - I = 2A - I.$

2. On écrit :

$$A^2 = 2A - I \Rightarrow 2A - A^2 = I \Rightarrow A(2I - A) = I \Rightarrow A^{-1} = 2I - A.$$

3. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrons que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. On écrit :

$$\alpha I + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta & 2\beta & \beta \\ -\beta & -\beta & -\beta \\ \beta & 2\beta & 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 2\beta & \beta \\ -\beta & \alpha - \beta & -\beta \\ \beta & 2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\alpha' I + \beta' A = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta' & 2\beta' & \beta' \\ -\beta' & -\beta' & -\beta' \\ \beta' & 2\beta' & 2\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + 2\beta' & 2\beta' & \beta' \\ -\beta' & \alpha' - \beta' & -\beta' \\ \beta' & 2\beta' & \alpha' + 2\beta' \end{pmatrix}.$$

Il reste à écrire : $\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 2\beta & \beta \\ -\beta & \alpha - \beta & -\beta \\ \beta & 2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + 2\beta' & 2\beta' & \beta' \\ -\beta' & \alpha' - \beta' & -\beta' \\ \beta' & 2\beta' & \alpha' + 2\beta' \end{pmatrix}$.

On a bien $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$ en assimilant les coefficients des deux matrices correspondants.
On définit now la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A.$$

4. Montrons (par récurrence) que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple (α_n, β_n) de réels tel que $X_n = \alpha_n I + \beta_n A$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \alpha_{n+1} &= \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} &= \dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$.

Initialisation. On a : $X_0 = \alpha_0 I + \beta_0 A = 0 \times I + 1 \times A$. On pose $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$.
Transmission. On suppose vrai à un rang $n \geqslant 0$. On écrit :

$$X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A = \frac{(\alpha_n I + \beta_n A)^2}{n+1} + 2I - A$$

$$= \frac{\alpha_n^2 I + \beta_n^2 A^2 + 2\alpha_n \beta_n A}{n+1} + 2I - A.$$

Puis on use de $A^2 = 2A - I$. On a :

$$X_{n+1} = \frac{\alpha_n^2}{n+1} I + 2\frac{\beta_n^2}{n+1} A - \frac{\beta_n^2}{n+1} I + 2\frac{\alpha_n \beta_n}{n+1} A + 2I - A.$$

On arrange.

$$X_{n+1} = \left(\frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2\right) I + \left(\frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1\right) A.$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \alpha_{n+1} &= \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} &= \dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$ et le tour est joué.

5. Déterminons $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$, et β_3 par la formule précédente.
On trouve $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 1$ en partant de $n = 0$ et $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$.
Puis on trouve $\alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$ en partant de $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 1$ et $n = 1$.
Enfin, on trouve $\alpha_3 = 3$ et $\beta_3 = 1$ en partant de $n = 2$ et $\alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$.

6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturons une expression de α_n et β_n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = n \text{ et } \beta_n = 1.$$

Puis on montre tout ça.
Intialisation. clair pour $n = 0$ (et jusqu'à $n = 3$).
Transmission. On a :

$$\alpha_{n+1} = \frac{n^2 - 1}{n+1} + 2 = n - 1 + 2 = n + 1 \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - 1 = 1.$$

Alors l'expression de X_n, en fonction de n est : $X_n = nI + A = \begin{pmatrix} n+2 & 2 & 1 \\ -1 & -1+n & -1 \\ 1 & 2 & 2+n \end{pmatrix}$.

EXERCICE 02

1-a Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, 1[$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.
Alors $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$ et on pose $P_0 = X$. Et $A(0)$ est vraie.
Puis pour $x \in I$, $f'(x)$ vaut :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)} \times \left(\frac{1}{1-x}\right)' e^{\frac{1}{1-x}}.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^3}e^{\frac{1}{1-x}}.$$

C'est bien $A(1)$ en posant $P_1 = X^2 + X^3$.

1-b On suppose que $A(n)$ est vraie pour un entier n non nul donné, montrons alors $A(n+1)$ est vraie. Partons de pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$. Alors $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ vaut :

$$P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) \times \frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^2} \times P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}.$$

C'est-à-dire :

$$\left(P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}.$$

Il suffit de poser :

$$P_{n+1} = X^2(P_n' + P_n).$$

1-c On remarque que $\deg P_0 = 1$ et $\deg P_1 = 3$. Si $\deg P_n = u_n$, alors $\deg P_n' = u_n - 1$ et $\deg P_{n+1} = \deg(X^2 P_n)$ et donc : $\deg P_{n+1} = u_{n+1} = 2 + u_n$. C'est une suite arithmétique de raison 2.
On trouve finalement :

$$\deg P_n = 1 + 2n.$$

1-d On a $P_2 = X^2(P_1' + P_1) = X^2(3X^2 + 2X + X^3 + X^2) = X^5 + 4X^4 + 2X^3$.
On a : $P_3 = X^2(P_2' + P_2) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$. (Après de terribles calculs).
1-e $P_1 = X^3 + X^2 = X^2(X+1)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
Puis :

$$P_2 = X^3(X^2 + 4X + 2) = X^3(X + 2 - \sqrt{2})(X + 2 + \sqrt{2})$$

dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
2-a f vérifie la relation : (1) $(1-x)^2 f'(x) = (2-x)f(x)$, pour tout $x \in I$.
En effet,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^3}e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)}e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{2-x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = (2-x)f(x).$$

2-b Gottfried Leibniz dit que si u et v sont deux fonctions n fois dérivables alors uv aussi et

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x).$$

Puis :

$$((2-x)f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2-x)^{(k)}f^{(n-k)}(x) = \binom{n}{0}(2-x)f^{(n)}(x) - \binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)$$

Et de même,

$$((1-x)^2 f'(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((1-x)^2)^{(k)} f^{(n+1-k)}(x)$$

$$= \binom{n}{0}(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - \binom{n}{1} 2(1-x) f^{(n)}(x) - \binom{n}{2} 2 f^{(n-1)}(x).$$

Mis ensemble :

$$\binom{n}{0}(2-x) f^{(n)}(x) - \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) = \binom{n}{0}(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - \binom{n}{1} 2(1-x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{2} 2 f^{(n-1)}(x).$$

Plus exactement :

$$(2-x) f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x) = (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x) f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x).$$

Ou encore :

$$\left[(2-x) + 2n(1-x)\right] f^{(n)}(x) + \left[-n - n^2 + n\right] f^{(n-1)}(x) = (1-x)^2 f^{(n+1)}(x).$$

Et finalement :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) = \left[2 + 2n - (1+2n)x\right] f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x).$$

Ainsi $a = 2 + 2n$, $b = -(1+2n)$ et $c = -n^2$.
Dans le cas $n = 1$,

$$(1-x)^2 f''(x) = (4-3x) f'(x) - f(x).$$

Comme $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$,

$$(1-x)^2 P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} = (4-3x) P_1\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} - P_0\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}.$$

On commence par enlever l'exponentielle.

$$(1-x)^2 P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x) P_1\left(\frac{1}{1-x}\right) - P_0\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Comme $P_0 = X$ et $P_1 = X^2 + X^3$, on en déduit :

$$(1-x)^2 P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x)\left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}\right] - \frac{1}{1-x}.$$

Et donc :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x)\left[\frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5}\right] - \frac{1}{(1-x)^3}.$$

On remarque que $4 - 3x = 1 + 3(1-x)$. Ce qui donne :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{3(1-x)}{(1-x)^4} + \frac{3(1-x)}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Et comme $\frac{3(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{3}{(1-x)^3}$ et $\frac{3(1-x)}{(1-x)^5} = \frac{3}{(1-x)^4}$, on en déduit :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{4}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On retrouve $P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3$.
Remarque : le matheux fou verra que :

$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X).$$

EXERCICE 03

Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une légère décharge électrique et revient à son point de départ. On s'intéresse au nombre d'essais utilisés pour trouver la bonne porte. On envisage successivement trois hypothèses.

Hypothèse 1. *Le rat a une mémoire parfaite. À chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les restantes.*

Hypothèse 2. *Le rat a une mémoire immédiate. À chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres.*

Hypothèse 3. *Le rat n'a pas de mémoire. Il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des portes.*

On note A_k l'événement : « au $k^{\text{ème}}$ essai, le rat trouve la bonne porte », l'événement B_n : « le rat utilise n essais pour trouver la bonne porte.

1. Écrivons B_n en fonction des événements A_k et leurs complémentaires.

$$B_n = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n.$$

2. On suppose être dans la première hypothèse : le rat a une mémoire parfaite. Calculons $P(B_n)$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. On pourra utiliser la formule des probabilités composées.

On a donc **une mémoire parfaite :** l'univers est $\{1, 2, 3, 4\}$.
$P(B_1) = \dfrac{1}{4}$; $P(B_2) = P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$; il faut ensuite encore utiliser la formule des probabilités composées :

$$P(B_3) = P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) P_{\overline{A_1 \cap A_2}}(A_3) = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ et } P(B_4) = \frac{1}{4}.$$

Bref, dans tous les cas, $P(B_i) = 1/4$ pour i variant de 1 à 4. Par contre $P(B_n) = 0$ pour $n \geqslant 5$.

3. On suppose être dans la deuxième hypothèse : le rat a une **mémoire immédiate**. Calculons $P(B_1)$, $P(B_2)$ puis $P(B_n)$ pour n entier non nul. L'univers est alors $\mathbb{N}^*$.

On a immédiatement : $P(B_1) = \dfrac{1}{4}$ puis $P(B_2) = P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$.
Avec les mêmes notations que ci-dessus pour $n \geqslant 3$,

$$P(B_n) = P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \ldots P_{\overline{A_{n-2}}}\left(\overline{A_{n-1}}\right) P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{3}.$$

4. On suppose être dans la troisième hypothèse : le rat n'a pas de mémoire (cerveau grillé par le courant par exemple). Calculons $P(B_1)$, $P(B_2)$ puis $P(B_n)$ pour n entier non nul.

Sans mémoire : l'univers est encore $\mathbb{N}^*$.
L'absence de mémoire du rat vaut hypothèse d'indépendance des différents événements, d'où :

$$P(B_n) = P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) \ldots P\left(\overline{A_{n-1}}\right) P(A_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}.$$