DL 04. TSI2 MATHÉMATIQUES

À rendre au plus tard le mercredi 27 Novembre 2024

Exercice : Matrices unipotentes

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Etude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.
   On considère les matrices
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? On demande une réponse sans calcul.
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de A.
   (d) Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (e) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminer trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que
   $$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$
   On pourra utiliser la question précédente.
   (f) En déduire une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.

2. Etude de $\mathcal{N}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
   (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.
   (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.

T.S.V.P →

3. Etude de $\mathcal{U}$.
   (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.
   (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
   (c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2$$

   On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.
   (a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ où B est la matrice définie à la question 1 .
   (b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.
   (c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

   (d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U^{(n)} = \underbrace{U \times \ldots \times U}_{n \text{ fois}}$
   (e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?
   (f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.
5. (a) En utilisant les résultats de la question 4 , expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?
   (b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).