2TSI. DEVOIR SURVEILLE N°02

Samedi 16 Novembre 2024

Les quatre exercices sont indépendants, de poids différents et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. La durée totale est de 4 heures et les calculettes sont interdites.

Exercice 01

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé. Ici, on note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à 3. On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

On rappelle que $\phi^2 = \phi \, o \, \phi$ et que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\phi^n = \phi^{n-1} \, o \, \phi$.

1. Montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_3[X]$ un endomorphisme, c'est-à-dire que ϕ est linéaire et que l'image par ϕ d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.

   On note dans la suite ϕ_3 cet endomorphisme.
2. Calculer $\phi_3(1)$, $\phi_3(X)$, $\phi_3(X^2)$ et $\phi_3(X^3)$.
   En déduire la matrice M de ϕ_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Inverser la matrice M et en déduire que ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Justifier le fait que la famille $\left(1, X, \dfrac{X^2}{2!}, \dfrac{X^3}{3!}\right)$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes s_0, s_1, s_2, s_3 telle que pour tout i appartenant à $[\![0,3]\!]$, on a : $\phi_3(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$.
   Pourquoi peut-on affirmer que (s_0, s_1, s_2, s_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_3[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, c'est-à-dire que $\delta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$.

   Que vaut δ^4 ? Comparer ϕ_3 et $Id - \delta$ puis justifier :
   $$(Id - \delta) \, o \, (Id + \delta + \delta^2 + \delta^3) = Id.$$
   En déduire l'expression de ϕ_3^{-1}.
   Exprimer alors la matrice de $Id + \delta + \delta^2 + \delta^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Que remarque t-on ?
7. ***Pour départager les ex-aequo***

   En déduire l'expression de s_i en fonction de X pour tout $i \in [\![0,3]\!]$.

Exercice 02

Une maladie circule dans une population $\mathcal{P}$ et p est la probabilité d'être contaminé. La probabilité d'être contaminé par contagion pour une personne saine (contact avec un malade) est $2/3$. On considère un commercial qui passe voir n clients qui font parti de la population $\mathcal{P}$ dans sa journée de travail. On suppose que le commercial n'est pas contaminé au départ de cette journée de travail. N est la variable aléatoire égale au nombre de clients contaminés rencontrés par le commercial au cours de cette journée.

Q1. Déterminer la loi de N (on reconnaîtra une loi classique dont on donnera les paramètres).

Q2. On pose B l'événement « le commercial est non contaminé à la fin de la journée » et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'événement A_k : « le commercial rencontre exactement k clients contaminés ».

(a) Comparer B et $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} (B \cap A_k)$.

(b) Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_k}(B)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

(c) Quelle est la probabilité pour que le commercial ne soit pas contaminé à la fin de sa journée de travail ?

T.S.V.P →

Exercice 03

On lance un dé équilibré à 4 faces notées $1, 2, 3$ et 4. On note D la variable aléatoire égale au numéro écrit sur la face en contact avec le sol. Puis on lance D fois une pièce équilibrée elle-aussi. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par D ?
2. Déterminer $X(\Omega)$.
3. Calculer pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, i]\!]$, $P_{(D=i)}(X = j)$ en fonction de $\binom{i}{j}$ et de $\left(\frac{1}{2}\right)^i$.
4. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(D = i)_{i\in[\![1,4]\!]}$, calculer pour tout $j \in [\![0, 4]\!]$, la probabilité $P(X = j)$.
5. Déterminer $E(X)$.

Exercice 04

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
1	α	$1/10$	0
2	$2/10$	$1/10$	$1/10$
3	$1/10$	$2/10$	$1/10$

On a ainsi $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.

1. Déterminer α pour que le tableau plus haut définisse bien la loi de probabilité de (X, Y).
   On fera ce choix de α dans la suite.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $E(XY)$ et enfin $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?