

**CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES**

Colle 09

Du 25 Novembre 2024 au 30 Novembre 2024

1) **Déterminants d'ordre $n \geq 2$** : VOIR COLLE 08.

2) **Réduction des endomorphismes**

Notion de valeur propre et de vecteur propre. Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Notion de polynôme caractéristique. On note $\chi_u(X) = \text{Det}(X \text{id} - u)$, si $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. χ_u est de degré n et son coefficient dominant est 1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

u est diagonalisable dans \mathbb{K} si et seulement si $\sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \dim E_\lambda = \dim E$.

3) **Trigonalisation (avec aide)**

Dans le cas où le polynôme caractéristique de u est scindé dans \mathbb{K} (c'est-à-dire donc dans le cas où u est trigonalisable dans \mathbb{K}) et si l'on note λ_i ses racines (éléments de \mathbb{K}) d'ordre de multiplicité α_i , pour i variant de 1 à p , alors :

$$\text{Det } u = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{\alpha_i} \text{ et } \text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i.$$

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, définie par la donnée de u_0 et de u_1 , et la relation de récurrence (R) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$, (a, b) étant deux éléments fixés de \mathbb{K} .

1) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, alors la relation (R) devient $U_{n+1} = A U_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.

2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on aboutit à $U_n = A^n U_0$.

3) On applique la méthode du calcul de la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

Le colleur vérifiera la maîtrise ou l'acquisition de certains des points suivants (en question de cours ou dans un exercice) :

Compétences à acquérir :

Sur les déterminants :

- 1) Savoir appliquer la règle de Pierre Sarrus pour $n = 3$.
- 2) Faire le lien avec le produit vectoriel pour le cas $n = 3$.
- 3) Savoir faire des opérations élémentaires sur un déterminant pour simplifier son calcul final (par exemple, le rendre triangulaire)
- 4) Savoir développer un déterminant selon une rangée.
- 5) Connaître le lien entre l'inversibilité d'une matrice et la non nullité de son déterminant.
- 6) Pour les meilleurs : arriver à trouver une relation de récurrence entre un déterminant d'ordre n et un déterminant d'ordre $n - 1$ pour permettre par récurrence descendante de calculer le déterminant initial.

Sur la réduction des endomorphismes :

- 1) lien entre le rang d'une matrice et la dimension de E_0 .
- 2) Savoir calculer χ_u en mettant des termes du type $X - a$ en facteur dans le déterminant.
- 3) Montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable dans le cas par exemple où 0 ou 1 sont seules valeurs propres.
- 4) Connaître les cas du programme où on peut affirmer que A est diagonalisable.
- 5) Calculer A^n en utilisant la diagonalisation ou la trigonalisation.
- 6) Trigonaliser une matrice 3×3 si l'on connaît deux vecteurs propres indépendants.
- 7) Résoudre une récurrence linéaire du type $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ ou $u_{n+3} = a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n$ en utilisant la méthode plus haut.