2TSI. DEVOIR SURVEILLE N°02

CORRECTION

Exercice 01

1) On considère l'application : $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'$.
Pour montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_3[X]$ un endomorphisme, il faut montrer la linéarité de ϕ et montrer que l'image de $\mathbb{R}_3[X]$ est incluse dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Linéarité de ϕ

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - (P + \lambda Q)' = P + \lambda Q - P' - \lambda Q' = P - P' + \lambda (Q - Q').$$

On retrouve $\phi(P) + \lambda\phi(Q)$.

La restriction de ϕ àÂ $\mathbb{R}_3[X]$ est elle un endomorphisme ?

Si le degré de P est inférieur ou égal à 3, celui de $P - P'$ aussi. Et donc si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Par ailleurs, comme $\mathbb{R}_3[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la base $(1, X, X^2, X^3)$, une autre méthode pour démontrer que ϕ_3 est un endomorphisme, c'est de vérifier que pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$, $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\phi(1) = 1,\ \phi(X) = X - 1.$$

Puis :

$$\forall k \in [\![2, 3]\!],\ \phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}.$$

Le polynôme $X^k - kX^{k-1}$ est de degré k pour tout k compris entre 1 et n. Donc $\phi(X^k)$ est un polynôme de degré au plus 3 pour tout entier k compris entre 0 et 3.

On peut conclure : ϕ induit sur $\mathbb{R}_3[X]$ un endomorphisme, noté ϕ_3.

2) On veut expliciter la matrice de ϕ_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est-à-dire dans la base notée $\beta = (1, X, X^2, X^3)$. On utilise la question précédente. On sait que $\phi(1) = 1$ et que pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, $\phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. On en déduit chaque colonne de la matrice $M_\beta(\phi_3)$, matrice représentative de ϕ dans la base canonique β de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$M_\beta(\phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) On veut démontrer que ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Donnons plein de méthodes.

Méthode 01

Le calcul de M^{-1} permet de montrer que ϕ_3 est bijectif. Faisons le, étant donné que de toute façon, c'est demandé. On commence par concaténer M et I_4.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Puis on fait successivement :

$$L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_4,\ L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_3,\ L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Et on peut conclure : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 02

Si vous connaissez les déterminants d'ordre n, on peut remarquer que le déterminant de $M_\beta(\phi_3)$ est triangulaire supérieure et est donc égal au produit des ses éléments diagonaux qui sont tous des 1.
Ainsi, $\mathsf{Det}\, M_\beta(\phi_3) = 1 \neq 0$ et ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Méthode 03

On peut prouver que le noyau de ϕ_3 est nul. En effet, si tel est le cas, comme ϕ_3 est un endomorphisme en dimension finie, ϕ_3 qui est alors injectif est bijectif (par le théorème du rang).
Soit donc $P \in \operatorname{Ker} \phi_3$, on a : $P = P'$. Or si P est de degré $k \geqslant 1$, P' est de degré $k-1$. Donc si $P \in \operatorname{Ker} \phi_3$, P est constant et comme P' est alors nul, $\operatorname{Ker} \phi_3$ est réduit au polynôme nul.

Méthode 04

On peut montrer que $M_\beta(\phi_3)$ est de rang 4, ce qui permet alors de dire que ϕ_3 est surjectif donc bijectif (endomorphisme en dimension finie). Si l'on fait les opérations élémentaires simultanées :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2,\ ...,\ C_4 \leftarrow C_4 + 3C_3,$$

la matrice $M_\beta(\phi_3)$ se transforme en I_4, qui est bien de rang 4.

Méthode 05

On peut expliciter l'inverse de ϕ_3, ce qui prouvera son existence et par la même occasion que ϕ_3 est bijectif.
Soit $Q = P - P' = \phi_n(P)$. En dérivant, $Q' = P' - P''$, puis de manière générale,

$$\forall k \in [\![1, 2]\!],\ Q^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)}.$$

Et enfin $Q^{(3)} = P^{(3)}$ car P est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$, donc de degré au plus 3. En sommant toutes ces égalités, on aboutit àÂ :

$$\sum_{k=0}^{3} Q^{(k)} = P - P' + ... + P^{(2)} - P^{(2)} + P^{(2)} = P.$$

Tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ possède donc un antécédent unique qui est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} Q^{(k)}$.
Ainsi, ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

4) La famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{i\in[\![0,3]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car cette famille est formée de 4 polynômes (non nuls) tous de degrés différents dans un espace vectoriel de dimension 4.

5) Comme ϕ_3 est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$, le polynôme $\dfrac{X^i}{i!}$, élément de $\mathbb{R}_3[X]$, possède donc un antécédent unique par ϕ_3 que l'on peut appeler s_i. Et $s_i \in \mathbb{R}_3[X]$.
Finalement, il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_3$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, 3]\!],\ \phi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}.$$

Par ailleurs, ϕ_3^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. On peut conclure que l'image de la base $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{i\in[\![0,3]\!]}$ par l'automorphisme ϕ_3^{-1} (qui est la famille $(s_i)_{i\in[\![0,3]\!]}$) est encore une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On peut conclure :

$$(s_0, s_1, ..., s_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].$$

6) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_3[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.
Or $\delta^4 = 0$ car la dérivée quatrième d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ est nulle.
La quantité :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^3)$$

vaut, en la développant :

$$Id + \delta + ... + \delta^3 - \delta - ... - \delta^3 - \delta^4.$$

Donc : $(Id-\delta)\,o\,(Id+\delta+\delta^2+\delta^3)=Id$. Ainsi : $\phi_3^{-1}=Id+\delta+\delta^2+\delta^3$.
On calcule les matrices M_1, M_2 et M_3 respectivement de δ, de δ^2 et de δ^3 dans $\mathcal{B}$.

$$M_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ M_1^2=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{ et } M_3=\begin{pmatrix}0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Et on a bien $M^{-1}=I_4+M_1+M_2+M_3=\begin{pmatrix}1&1&2&6\\0&1&2&6\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

7) On remarque que $\phi_3=Id-\delta$ et donc $\phi_3^{-1}=Id+\delta+...+\delta^3$. On retrouve l'expression trouvée à la quatrième méthode du développement de la question **3)**.

$$\forall i\in[\![0,3]\!],\ \phi_3^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right)=\left(Id+\delta+...+\delta^3\right)\left(\frac{X^i}{i!}\right).$$

Alors, pour i fixé dans $[\![0,3]\!]$,

$$\phi_3^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right)=\frac{X^i}{i!}+i\frac{X^{i-1}}{i!}+...+i(i-1)...(i-(i-1))\frac{X^{i-i}}{i!}.$$

C'est-à-dire :

$$\phi_3^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right)=\frac{X^i}{i!}+\frac{X^{i-1}}{(i-1)!}+...+\frac{X^0}{0!}.$$

On peut conclure : $\forall i\in[\![0,3]\!],\ \phi_3^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right)=\sum\limits_{k=0}^{i}\frac{X^k}{k!}$.

Exercice 02

Q1. La variable aléatoire N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Q2-a Donc on pose B l'événement ≪ le commercial est non contaminé à la fin de la journée ≫ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, l'événement A_k : ≪ le commercial rencontre exactement k clients contaminés (et donc $n-k$ clients non contaminés) ≫.

On a : $B=\bigcup\limits_{k=0}^{n}(B\cap A_k)$.

Q2-b Et la probabilité de ne pas être contaminé sachant qu'on a rencontré k personnes contaminées est $P_{A_k}(B)=\dfrac{1}{3^k}$.

Q2-c On a d'après la formule des probabilités totales : $P(B)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(B\cap A_k)=\sum\limits_{k=0}^{n}P_{A_k}(B)P(A_k)$.

De plus, l'événement A_k est aussi $(N=k)$.

$$P(B)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}P(N=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}.$$

C'est la formule du binôme de Newton :

$$P(B)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{3}\right)^kq^{n-k}=\left(\frac{p}{3}+q\right)^n.$$

Exercice 03

1. On a immédiatement $D(\Omega) = [\![1, 4]\!]$ et comme le dé est équilibré, D suit évidemment la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$. On peut alors écrire :

$$\forall i \in [\![1, 4]\!],\ P(D = i) = \frac{1}{4}.$$

2. On lance donc le dé de une à quatre fois. On compte le nombre de piles obtenus. Il y en aura donc de zéro à quatre. Ainsi $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$.

3. Pour $i \in [\![1, 4]\!]$ fixé, si l'on suppose l'événement $(D = i)$ exécuté, on lance alors le dé i fois. On répète i fois la même espérience de façon indépendante et l'événement « obtenir pile » a pour probabilité 1/2.

$$\forall i \in [\![1, 4]\!],\ \forall j \in [\![0, i]\!],\ P_{(D=i)}(X = j) = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{i-j} = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Commentaires : On reconnaît la loi binomiale $\mathcal{B}\left(i, \frac{1}{2}\right)$.

4. Il est temps d'utiliser la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(D = i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.

Pour tout $j \in [\![0, 4]\!]$, $P(X = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} P(D = i)P_{(D=i)}(X = j)$ en utilisant l'égalité, valable pour $j > i$: $P_{(D=i)}(X = j) = 0$.

On en déduit alors (avec la convention $\binom{i}{j} = 0$ pour $j > i$) :

$$\forall j \in [\![0, 4]\!],\ P(X = j) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \times \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

On développe alors les formules.

- Cas $j = 0$. Alors $P(X = 0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{64}$.
- Cas $j = 1$. Alors $P(X = 1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \times i\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16}\right) = \frac{26}{64}$.
- Cas $j = 2$. Alors $P(X = 2) = \displaystyle\sum_{i=2}^{4} \frac{1}{4} \times \frac{i(i-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16}\right) = \frac{16}{64}$.
- Cas $j = 3$. Alors $P(X = 3) = \displaystyle\sum_{i=3}^{4} \frac{1}{4} \times \frac{i(i-1)(i-2)}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} + \frac{4}{16}\right) = \frac{6}{64}$.
- Cas $j = 4$. Alors $P(X = 4) = \displaystyle\sum_{i=4}^{4} \frac{1}{4} \times \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{64}$.

On peut remarquer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{4} P(X = j) = \frac{15}{64} + \frac{26}{64} + \frac{16}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{64}{64} = 1$.

Le compte est bon !

5. On a $E(X) = \dfrac{26}{64} + \dfrac{32}{64} + \dfrac{18}{64} + \dfrac{4}{64} = \dfrac{80}{64} = 1.25$

Exercice 04

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

XY	0	1	2
1	a	1/10	0
2	2/10	1/10	1/10
3	1/10	2/10	1/10

On a ainsi $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.

1. On a une loi de probabilité si et seulement si $\displaystyle\sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = 1$.

$$a + 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = 1.$$

On trouve $a = \dfrac{1}{10}$.

2. On somme chaque ligne pour la loi de X.

$$P(X = 1) = \frac{2}{10} = 0.2,\ P(X = 2) = \frac{4}{10} = 0.4,\ P(X = 3) = \frac{4}{10} = 0.4$$

On somme chaque colonne pour la loi de Y.

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10} = 0.4,\ P(Y = 1) = \frac{4}{10} = 0.4,\ P(Y = 2) = \frac{2}{10} = 0.2.$$

3. On a sans problème :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{3} kP(X = k) = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} = 2.2,\ E(Y) = \sum_{k=0}^{2} kP(Y = k) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8,$$
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{3} k^2 P(X = k) = \frac{54}{10} = 5.4,\ E(Y^2) = \sum_{k=0}^{2} k^2 P(Y = k) = \frac{12}{10} = 1.2,$$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 5.4 - (2.2)^2 = 0.56$ et $V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1.2 - (0.8)^2 = 0.56 = V(X)$

4. Par exemple $P(X = 1, Y = 1) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 1)$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Calculons $\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

On calcule donc $E(XY)$ en ajoutant tous les termes non nuls.

$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times 1 \times \frac{2}{10} + 3 \times 2 \times \frac{1}{10} = \frac{19}{10} = 1.9$$

On peut conclure : $\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \dfrac{14}{100} = 0.14$