DL 04. TSI2

Correction

1-a On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 2 & -4 \\ 0 & X+1 & -2 \\ 2 & 2 & X-5 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X+1 & X-1 & -4 \\ 0 & X-1 & -2 \\ 2 & X-1 & X-5 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} X+1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & X-5 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3+2C_2}{=} (X-1)\begin{vmatrix} X+1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} X+1 & -2 \\ 2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-2X+2) = (X-1)^3$$

On en déduit $\boxed{\mathsf{Sp}\,(A) = \{1\} \text{ et } m(1) = 3}$.

1-b Si A était diagonalisable, comme 1 est sa seule valeur propre, il existerait une matrice inversible P telle que $A = PI_3P^{-1} = I_3$ ce qui est une contradiction.
Ainsi $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

1-c On a $I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\mathrm{Rg}\,(I_3 - A) = \mathrm{Rg}\,(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Rg}\,(C_1, C_2) = 2$$

car $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ et car C_1, C_2 ne sont visiblement pas colinéaires.
La formule du rang donne alors $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,(I_3 - A) = 1$, de quoi on en déduit

$$\boxed{E_1 = \mathsf{Ker}\,(I_3 - A) = \mathsf{Vect}\,(1,1,1)}$$

1-d On a

$$(A - I_3)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & -y & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ -x & -y & +2z & = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrr} x & = & 1 & +y \\ z & = & 1 & +y \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1+y \\ y \\ 1+y \end{pmatrix}$$

D'où le résultat : $\boxed{(A - I_3)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R},\ X = \begin{pmatrix} 1+y \\ y \\ 1+y \end{pmatrix}}$.

1-e On a déjà $f\,(e_1) = e_1 \Leftrightarrow e_1 \in E_1$ donc on prend $\boxed{e_1 = (1,1,1)}$.
Ensuite, on a $f\,(e_2) = 2e_1 + e_2 \Leftrightarrow (f - id)(e_2) = (2,2,2)$, donc on prend pour e_2 un vecteur de la forme $(1+y, y, 1+y)$. On peut par exemple choisir (arbitrairement) $y = 0$ ce qui donne $\boxed{e_2 = (1,0,1)}$.
Enfin, on a $f\,(e_3) = -2e_2 + e_3 \Leftrightarrow (f - id)(e_3) = (-2,0,-2)$. On résout alors le système associé :

$$(A - I_3)X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & -y & +2z & = -1 \\ & -y & +z & = 0 \\ -x & -y & +2z & = -1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrr} x & = & 1 & +y \\ z & = & & y \end{array} \right.$$

On prend alors arbitrairement $y = 0$, ce qui donne $\boxed{e_3 = (1,0,0)}$.

1-f Par théorème, deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Il s'agit donc de trouver une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cela équivaut à dire que l'on a $f(u) = u$, $f(v) = 2u + v$, et $f(w) = -2v + w$.

Il suffit donc de montrer que e_1, e_2, e_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, et alors cette base conviendra.

Or on a $\mathsf{Det}\,(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ce qui prouve le résultat : il suffit de prendre pour P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Finalement, $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$

2-a On note $E_{i,j}$ la matrice de taille 3 dont tous les termes valent 0, sauf le terme d'indice (i, j) qui vaut 1. On peut alors écrire pour toute matrice N :

$$N \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}^3,\ N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,2} + bE_{1,3} + cE_{2,3}.$$

Cela prouve $\mathcal{N} = \mathsf{Vect}\,(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})$, de quoi on déduit immédiatement que $\boxed{\mathcal{N} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

De plus la famille $(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})$ génère $\mathcal{N}$ et comme elle est libre (en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), on en déduit que c'est une base de $\boxed{\mathcal{N} \text{ qui est donc de dimension 3.}}$

2-b Il suffit de constater que $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$ pour avoir le résultat : $\boxed{\mathcal{N} \text{ est stable par produit}}$.

2-c Après calculs on obtient $\boxed{N^3 = 0}$.

3-a Les matrices de $\mathcal{U}$ ont toutes des coefficients diagonaux égaux à 1, donc $O_3 \notin \mathcal{U}$ ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{U} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

3-b Il suffit de calculer $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + a' & b' + ac' + b \\ 0 & 1 & c' + c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ pour avoir le résultat : $\boxed{\mathcal{U} \text{ est stable par produit}}$.

3-c Les matrices $U \in \mathcal{U}$ sont triangulaires supérieures, donc leur déterminant est le produit de leurs termes diagonaux, soit $\mathsf{Det}\,U = 1 \neq 0$ ce qui prouve que U est inversible. Ainsi $\boxed{\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})}$.

4-a Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a directement $\boxed{B^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & -2\alpha(\alpha - 1) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

4-b On a $N \in \mathcal{N}$, or $\mathcal{N}$ est stable par produit et par combinaison linéaire, donc on a $\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{N}$. Cela prouve $\boxed{U(\alpha) \in \mathcal{U}}$.

4-c On a

$$\begin{aligned}
U^{(\alpha)}U^{(\beta)} &= (I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2)(I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^2) \\
&= I + (\alpha+\beta)N + \alpha\beta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^2 + (\cdots)\underbrace{N^3}_{O_3} + (\cdots)\underbrace{N^4}_{O_3} \\
&= I + (\alpha+\beta)N + (\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2})N^2 \\
&= U^{(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

Et par ailleurs :

$$\begin{aligned}
(U^{(\alpha)})^{(\beta)} &= (\ I + \underbrace{\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2}_{N'}\ )^{(\beta)} \\
&= I + \beta N' + \frac{\beta(\beta-1)}{2} N'^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2)^2 \\
&= I + \alpha\beta N + (\frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\alpha^2\beta(\beta-1)}{2})N^2 + O_3 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\beta\alpha}{2}(\alpha - 1 + \alpha(\beta-1))N^2 = U^{(\alpha\beta)}
\end{aligned}$$

Cela prouve $\boxed{U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \text{ et } \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}}$.

4-d Il suffit de raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
En $n = 1$, on a $U^{(1)} = I_3 + N = U$, donc on a bien $U^{(1)} = U^1$.
Pour l'hérédité, il suffit d'utiliser la propriété aux rang 1 et n, ce qui permet d'écrire : $U^{(n+1)} = U^{(n)}U^{(1)} = U^n U^1 = U^{n+1}$.
Par ailleurs le résultat reste vrai si $n = 0$, d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U^{(n)} = U^n}$.

4-e Puisque $I_3 N = N I_3 = N$ la formule du binôme s'applique, et considérant que $N^k = O_3$ pour $k \geqslant 3$ on peut écrire pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
U^n = (I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} N^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} I_3^{n-k} N^k + O_3 \\
&= I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = U^{(n)}
\end{aligned}$$

Cette démonstration nécessite a priori $n \geqslant 2$, mais si on prend la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, elle reste valable dans les cas $n = 0, 1$. On retrouve ainsi la formule $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U^{(n)} = U^n}$.

4-f La question 4-c permet d'écrire $UU^{(-1)} = U^{(1)}U^{(-1)} = U^{(1-1)} = U^{(0)} = 3$. Cela prouve $\boxed{U^{(-1)} = U^{-1}.}$

5-a Comme $B \in \mathcal{U}$, en utilisant la question 4.3 on peut écrire : $B = B^{(1)} = \left(B^{(\frac{1}{2})}\right)^2$

donc $\boxed{C = B^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$

5-b On a $A = PBP^{-1} = PC^2P^{-1} = \left(PCP^{-1}\right)^2$ donc $\boxed{D = PCP^{-1} \text{ convient.}}$