CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES

Colle 13

Du 06 Janvier 2025 au 10 Janvier 2025

1) Séries numériques Révision colle 12.

2) Séries entières

Définition du rayon de convergence pour une série entière $\sum_n a_n z^n$ réelle ou complexe.

C'est la borne sup de $\{|z|, \text{ la suite } |a_n z^n|_n \text{ est bornée }\}$.

Détermination du rayon de convergence par la règle de d'Alembert. Cas des séries non partiellement lacunaires avec la limite du rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ qui donne $1/R$.

Rayon de convergence d'une combinaison linéaire.

Si $a_n \sim b_n$ alors $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont le même rayon de convergence.

Cas des séries réelles. Continuité, dérivabilité et intégration dans le disque ouvert de convergence.

Développements en série entière usuels.

(1)	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$R = 1$
(2)	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$R = 1$
(3)	$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$R = \infty$
(4)	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$R = \infty$
(5)	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$R = \infty$

(1)	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$
(2)	$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$	$R = \infty$

Série de Taylor et unicité des coefficients.

Know-how :

Sur les séries numériques :

1) Savoir démontrer la convergence ou la divergence d'une série à termes positifs en utilisant une des pistes au programme (divergence grossière, limite de S_n, limite de R_n, majoration, minoration, domination, équivalence, d'Alembert, comparaison à une intégrale.
2) Savoir quand une série géométrique ou une série de Riemann converge ou diverge.
3) Calculer ou trouver un équivalent de R_n dans des cas simples.
4) Ne pas confondre convergence et absolue convergence d'une série.
5) Savoir appliquer le critère spécial des séries alternées.

Sur les séries entières (pas encore de lien avec les équations différentielles) :

1) Déterminer le rayon de convergence d'une série entière avec d'Alembert : cas général, en particulier les séries entières partiellement lacunaires ou cas des séries avec $a_n \neq 0$ pour tout n.
2) Savoir calculer la somme d'une série entière en utilisant la somme d'une série géométrique ou une dérivation ou une intégration d'un D.S.E usuel.
3) Connaître les D.S.E usuels et trouver un D.S.E par dérivation, intégration, changement d'indice etc. à partir des D.S.E usuels.