DL 05. TSI2
Correction

Une fonction définie à partir d'une intégrale

Présentation générale

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'application : automatique, traitement du signal, etc.
On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

A. **Définition de la fonction**

Q1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\, dt$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.

☞ Si $\alpha \neq -1$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$, on a :

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right)$$

☞ Donc $\displaystyle\int_\varepsilon^1 t^\alpha\, dt$ admet une limite finie quand $\alpha \to 0$ que si $\alpha > -1$ et alors :

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha+1}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\, dt = \frac{1}{\alpha+1}$

☞ Par ailleurs $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\, dt$ diverge si $\alpha < -1$. En effet, puisque $\alpha+1<0$, on a :

$$\varepsilon^{\alpha+1} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{donc} \qquad \int_\varepsilon^1 t^\alpha\, dt = \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

☞ Enfin pour $\alpha = -1$

$$\int_\varepsilon^1 t^{-1}\, dt = [\ln(t)]_\varepsilon^1 = (\ln(1)-\ln(\varepsilon)) = -\ln(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc là encore $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\, dt$ diverge.

Q2. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers O^+, de la fonction définie sur $]0,1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.

☞ Comme $1+t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \times \dfrac{1}{t^{x-1}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$

Q3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

☞ D'après la question **Q01** $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\, dt$ converge si et seulement si $x-1>-1$ (c.a.d $x>0$).

☞ Or $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$ converge si et seulement si $x>0$.

On définit alors sur $]0,+\infty[$ la fonction f par : $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$.
La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

B. Calcul de $f(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

Q4. Montrer que $f(1)=\ln(2)$, puis que $f(2)=1-\ln(2)$. On pourra remarquer que, pour tout $t\in[0,1]$:

$$1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}.$$

☞ Calcul de $f(1)$:

$$f(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt=[\ln(1+t)]_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

☞ Par ailleurs :

$$f(1)+f(2)=\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt+\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt=\int_0^1 \frac{1+t}{1+t}\,dt=\int_0^1 1t=[t]_0^1=1$$

Donc $f(2)=1-f(1)=1-\ln(2)$

Q5. Rappeler la formule de factorisation de a^n-b^n, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $n\in\mathbb{N}^*$.
En déduire que, pour tout $t\in[0,1]$, $n\geqslant 1$:

$$1-(-t)^n=(1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$$

☞ Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $n\in\mathbb{N}^*$:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k}b^k$$

☞ Donc $1-(-t)^n=1^n-(-t)^n=(1-(-t))\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}1^{n-k}(-t)^k=(1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$

Q6. En déduire que, pour tout entier $n\geqslant 2$:

$$f(n)=(-1)^{n-1}\ln(2)+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{1}{k+1}$$

On pourra remarquer que, pour $n\geqslant 2$ et $t\in[0,1]$: $t^{n-1}=(-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$.

— Donc :

$$\begin{aligned}
f(n)&=\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{(-1)^{n-1}(-t)^{n-1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t}\underbrace{\left((-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}\left(1-(-t)^{n-1}\right)\right)}_{(-1)^{n-1}(-t)^{n-1}}\,dt\\
&=(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{1}{1+t}\,dt\underbrace{+(-1)^n}_{-(-1)^{n-1}}\int_0^1\frac{1}{1+t}\left(1-(-t)^{n-1}\right)\,dt\\
&\underbrace{=}_{\textbf{Q05}}(-1)^{n-1}f(1)+(-1)^n\int_0^1\frac{1}{1+t}\times\left((1+t)\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k\right)\,dt\\
&=(-1)^{n-1}\ln(2)+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\int_0^1 t^k\,dt\\
&=(-1)^{n-1}\ln(2)+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\\
&=(-1)^{n-1}\ln(2)+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Q7. Écrire une fonction python d'en-tête `def fEntier(n) :` qui calcule $f(n)$ à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On supposera la fonction `log` (pour ln) importée de la bibliothèque **numpy**.

```
import numpy as np
def fEntier(n):
    if n==1:
        return np.log(2)
    else:
        som=1
        for k in range(1,n-1):
            som=som+(-1)**k/(k+1)
        return (-1)**(n-1)*np.log(2)+(-1)**n*som
```

On peut aussi remarquer que $f(n+1) = -f(n) + \dfrac{1}{n-1}$ et proposer le programme récursif :

```
import numpy as np
def fEntier(n):
    if n==1:
        return np.log(2)
    else:
        return fEntier(n-1)+1/(n-1)
```

C. **Variations de f**

Q8. Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

☞ Soit g une fonction définie sur un intervalle I et Ã valeurs dans $\mathbb{R}$, alors g est dite décroissante si :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b \Rightarrow g(a) \geqslant g(b)$$

Q9. Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leqslant \beta$. Comparer, pour tout $t \in]0, 1]$, t^α et t^β.
En déduire que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

☞ $\forall t \in]0, 1],\ \ln(t) \leqslant 0$
☞ Donc pour $t \in]0, 1]$:

$$-1 < \alpha \leqslant \beta \Rightarrow -\ln(t) > \alpha \ln(t) \geqslant \beta \ln(t) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{exp croissante strict sur } \mathbb{R}} \quad e^{-\ln(t)} \geqslant e^{\alpha \ln(t)} > e^{\beta \ln(t)} \Rightarrow \frac{1}{t} \geqslant t^\alpha \geqslant t^\beta$$

☞ Donc pour $t \in]0, 1]$ et $0 < x \leqslant y$ (donc $-1 < x - 1 \leqslant y - 1$), on a en appliquant le résultat ci-dessus :

$$t^{x-1} \geqslant t^{y-1} \Rightarrow \frac{t^{x-1}}{1+t} \geqslant \frac{t^{y-1}}{1+t}$$

☞ Donc pour $0 < x \leqslant y$, on a par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt \geqslant \int_0^1 \frac{t^{y-1}}{1+t}\, dt \quad \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

☞ Donc $0 < x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
La fonction f est donc décroissante.

Q10. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0, 1]$: $\dfrac{t^{x-1}}{2} \leqslant \dfrac{t^{x-1}}{1+t} \leqslant t^{x-1}$.

En déduire que, pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

☞ Pour tout $x > 0$ et $t \in]0, 1]$: $t^{x-1} > 0$.
☞ Donc tout $x > 0$ et $t \in]0, 1]$, on a :

$$0 < t \leqslant 1 \Rightarrow 1 < 1 + t \leqslant 2 \underbrace{\Rightarrow}_{x \mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur }]0,+\infty[} \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t} < 1 \Rightarrow \frac{t^{x-1}}{2} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} < t^{x-1}.$$

☞ Donc par croissance de l'intégrale, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{x-1}\,dt \Rightarrow \left[\frac{t^x}{2x}\right]_0^1 \leqslant f(x) \leqslant \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

Q11. En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

☞ Comme $\dfrac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors par théorème de comparaison (dit des *"gendarmes"* ici) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
☞ Comme $\dfrac{1}{2x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ alors par théorème de comparaison $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$.

Q12. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).

Laissé au lecteur.

D. Équivalent de f en $+\infty$

Q13. Montrer que, pour $x \in]0, +\infty[$: $f(x) + f(x + 1) = \dfrac{1}{x}$.

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^x}{1+t}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}\frac{t+1}{1+t}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

Q14. En utilisant le résultat de la question **Q9**, montrer que, pour $x > 1$:

$$f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x-1).$$

☞ Pour $x > 1$, par décroissance de la fonction f :

$$x+1 \geqslant x \geqslant x-1 \Rightarrow f(x+1) \leqslant f(x) \leqslant f(x-1) \Rightarrow \underbrace{f(x+1) + f(x)}_{\frac{1}{x}} \leqslant 2f(x) \leqslant \underbrace{f(x) + f(x-1)}_{\frac{1}{x-1}}.$$

Q15. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

☞ Avec la question précédente, pour $x > 1$, par décroissance de la fonction f :

$$\frac{1}{x} \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{1}{x-1} \Rightarrow 1 \leqslant 2xf(x) \leqslant \frac{x}{x-1}$$

☞ Comme $\dfrac{x}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$, on a $\dfrac{x}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puis par le théorème de comparaison (dit des *"gendarmes"* encore)

$$2xf(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

☞ Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.