CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES

Colle 15

Du 20 Janvier 2025 au 25 Janvier 2025

1) Équations différentielles linéaires du premier et second ordre Révision colle 14

2) Systèmes différentiels d'ordre 1 à matrice constante Révision colle 14

3) Espaces préhilbertiens et euclidiens

Notion de produit scalaire (application bilinéaire symétrique définie positive).

Exemples classiques : $\langle \vec{u},\, \vec{v}\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ dans $E = \mathbb{R}^n$, de $\langle A,\, B\rangle = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (mais développé que pour $n = 2$) et de $\langle f,\, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ dans $E = \mathcal{C}^0([a, b],\, \mathbb{R})$.

Norme associée à un produit scalaire. Inégalité triangulaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité. Identité de polarisation et du parallélogramme.

Projection orthogonale d'un vecteur. Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel. Sous-espaces vectoriel orthogonal à un sous espace vectoriel. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Inégalité de Bessel.

Expression du produit scalaire et de la matrice d'un endomorphisme, E étant rapporté à de ses bases orthonormales :

Si E est rapporté à une de ses bases orthonormales $\mathcal{B} = (\vec{w}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et si l'on pose $\vec{x}(x_1, ..., x_n)$ et $\vec{y}(y_1, ..., y_n)$ alors : $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $\langle \vec{x}, \vec{w}_k\rangle = x_k$ et on a les assertions :

$$\text{(i) } \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},\ \text{(ii) } \langle \vec{x},\, \vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \text{(iii) } d(\vec{x},\, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Puis, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ sont les matrices colonnes associées, $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = X^T Y$.

Know-how :

Sur les équations différentielles linéaires d'ordre un et deux :

1) savoir résoudre $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, dans le cas où a se primitive facilement.
2) Savoir résoudre $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ par la méthode de variation de la constante dans des cas où la primitivation est à la portée de toutes les bourses. Trouver alors la solution unique du problème de Cauchy.
3) Savoir déterminer une solution développable en série entière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou d'ordre 2. On pourra prendre des coefficients non constants mais uniquement polynomial de faible degré.
4) Savoir résoudre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$, où a et b sont deux constantes.
5) Savoir résoudre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$, où a et b sont deux constantes et f une fonction polynomiale, exponentielle ou trigonométrique.
6) Savoir résoudre $X'(t) = AX(t)$, dans le cas où A est diagonalisable ou trigonalisable (avec alors aide du colleur pour la trigonalisation)
7) Savoir passer d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à un système différentiel du premier ordre associé à une matrice carrée d'ordre 2 en étant guidé.

Sur les espaces préhilbertiens et euclidiens :

1) Montrer qu'une application est un produit scalaire.
2) Savoir reconnaître et appliquer Cauchy-Schwarz.
3) Déterminer une base orthonormale à partir d'une base quelconque par l'algorithme de Gram-Schmidt pour une base de deux ou trois vecteurs.
4) Déterminer la projection orthogonale sur F à partir d'une base orthonormale de F.
5) Reconnaître une matrice de projection orthogonale et déterminer ses éléments caractéristiques.
6) Déterminer la distance d'un vecteur $\vec{x}$ à un sous-espace F en utilisant la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur F.