2TSI. DEVOIR SURVEILLE N° 03

Samedi 11 janvier 2025

La durée totale est de 4 heures et les calculettes sont interdites.

Dans ce problème, on se propose d'étudier la fonction S de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,n^2} = 1 + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-4x} + \mathrm{e}^{-9x} + \mathrm{e}^{-16x} + \dots$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les principales propriétés de la fonction S. On en détermine en particulier des équivalents aux bornes de son intervalle de définition en exploitant une intégrale dont on étudie la convergence et la valeur dans la partie II.

Partie I : Étude de la fonction S

On exploite ici la série entière de la variable réelle t définie sous réserve de convergence par :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} = 1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \dots$$

On remarque donc que cette série entière est partiellement lacunaire.

1. *Étude du domaine de définition des fonctions F et S*
   (a) Examiner pour $|t| \geqslant 1$ la nature de la série $\sum t^{n^2}$.
   (b) Pour tout réel t de $]-1,1[$ et tout entier naturel n, justifier l'inégalité : $|t|^{n^2} \leq |t|^n$.
   Étudier la convergence et expliciter la somme de la série $\sum |t|^n$ pour $n \geqslant 0$ et $|t| < 1$.
   En déduire la nature des séries $\sum |t|^{n^2}$ et $\sum t^{n^2}$ pour $|t| < 1$.
   (c) Préciser le domaine de définition de la fonction F.
   (d) Déduire des résultats précédents que la série $\sum \mathrm{e}^{-x\,n^2}$ converge si et seulement si $x > 0$, puis exprimer alors sa somme $S(x)$ en fonction de $F(\mathrm{e}^{-x})$.
2. *Premières propriétés des fonctions F et S*
   (a) Justifier que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
   (b) Déterminer le sens de variation de F sur $[0,1[$.
   En déduire que la fonction F admet une limite finie ou infinie en 1.
   (c) En exploitant l'inégalité $F(t) \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} t^{n^2}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel t de $[0,1]$, établir, pour tout entier naturel N, que $\lim\limits_{t\to 1} F(t) \geqslant N+1$.
   Quelle est la limite de $F(t)$ lorsque t tend vers 1 ?
   (d) Déduire des résultats précédents que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et donner son sens de variation et les limites de $S(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
3. *Recherche d'un équivalent de $S(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$*
   (a) Pour tout réel $x > 0$, établir que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,n^2} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,n}$.
   (b) En explicitant cette dernière somme, démontrer que $S(x) - 1 - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x})$ en $+\infty$.
   En déduire un équivalent de $S(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.
4. *Recherche d'un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0*
   (a) Établir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:
   $$\mathrm{e}^{-x(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\,t^2}\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\,n^2}.$$
   (b) En déduire l'inégalité pour $x > 0$: $S(x) - 1 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t^2}\mathrm{d}t \leqslant S(x)$.
   (c) En exploitant l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer l'intégrale ci-dessus en posant $u = t\sqrt{x}$.
   Retrouver alors $\lim\limits_{x\to 0} S(x)$, puis donner un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

5. *Recherche d'une valeur approchée de $S(x)$*
   (a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:
$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,n^2} \leqslant \int_N^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t^2}\mathrm{d}t.$$
   (b) À l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S(x) - \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-x\,n^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{N^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x\,N^2}}{2\,N\,x}.$$
   (c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.
   (d) Préciser le process pour obtenir une valeur approchée de $S(1)$ à 10^{-7} près. (On ne demande pas le résultat car la calculette n'est pas autorisée.)

Partie II : Calcul de l'intégrale de Gauss

On se propose ici de justifier l'existence et de calculer l'intégrale de Gauss, qu'on a exploitée précédemment à la question 4, et qui est définie par : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

6. *Convergence de l'intégrale de Gauss I*
   (a) Pour tout réel $t \geqslant 1$, établir l'inégalité suivante : $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   (b) Justifier l'existence et préciser la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
   (c) En déduire l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, puis de l'intégrale de Gauss I.
7. *Étude des intégrales de Wallis*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit **l'intégrale de Wallis** $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer les intégrales W_0 et W_1.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties du produit $\cos^{n+1}(t) = \cos(t)\cos^n(t)$, établir que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad W_{n+1} = n\left(W_{n-1} - W_{n+1}\right).$$
   Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer W_{n+1} en fonction de W_{n-1}, puis justifier l'égalité suivante :
$$\forall n \geqslant 1, \quad (n+1)\,W_{n+1}W_n = nW_nW_{n-1}.$$
   En déduire qu'on a pour tout entier $n \geqslant 1$, $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, établir l'inégalité $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$.
   En déduire l'équivalence $W_{n-1} \sim W_n$.
   (d) Déduire des résultats précédents l'équivalence : $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,n}}$.
8. *Calcul de l'intégrale de Gauss I*
   (a) Pour tout réel $x > -1$, établir l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$.
   En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$, les inégalités suivantes :
$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}.$$
   (b) À l'aide de ces inégalités, établir la double inégalité suivante pour $n \geq 1$:
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$
   (c) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(u)$ dans la première de ces intégrales, et $t = \sqrt{n}\tan(u)$ dans la dernière de celles-ci, établir qu'on a pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$
   (d) À l'aide de l'équivalent de W_n obtenu au 7, déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss I.