DL 06. TSI2

MATHÉMATIQUES

À rendre au plus tard le mercredi 22 janvier 2025

EXERCICE 01

1. On pose $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto H(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{4^p (p!)^2}$.
   (a) Justifier l'existence de $H(x)$ pour tout réel x.
   (b) Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.
   (c) Établir que H est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
   $$(E_0) : \ xy''(x) + y'(x) - xy(x) = 0.$$
2. On se propose de résoudre (E_0) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.
   (a) Soient $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
   $$\lambda(x) = \frac{y(x)}{H(x)}$$
   pour tout $x > 0$. Montrer que y est solution de (E_0) sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$,
   $$x\lambda''(x)H(x) + (2xH'(x) + H(x))\,\lambda'(x) = 0.$$
   (b) Résoudre l'équation différentielle :
   $$(E_1) : \ xH(x)z' + (2xH'(x) + H(x))z = 0$$
   d'inconnue $z \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.
   En déduire les solutions de (E_0) sur I qui seront exprimées à l'aide des fonctions H et
   $$G : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto G(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(H(t))^2}.$$
3. On considère désormais l'équation différentielle $(E_2) : \ xy''(x) + y'(x) - xy(x) = 2$ dont l'inconnue y est une fonction à valeurs réelles.
   (a) Soit $y :]-R, R[\to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 0$ dont l'expression analytique est de la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où les coefficients a_n sont réels.
   Montrer que y est solution de (E_2) sur $]-R, R[$ si, et seulement si, $a_1 = 2$ et pour tout $n \geqslant 1$,
   $$(n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1}$$
   (b) En déduire les expressions de a_{2p} et de a_{2p+1} en fonction de $p \in \mathbb{N}$. Les réponses feront intervenir des factorielles.
   (c) Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ et en déduire toutes les solutions de (E_2) qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

T.S.V.P $\rightarrow$

EXERCICE 02

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.
On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations (1) :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. En utilisant les relations (1) et le fait que Φ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et que Φ est symétrique, c'est-à-dire que $\Phi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{Y}, \vec{X})$ pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs du plan, calculer $\Phi(2\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + 3\vec{j})$ en fonction de θ.
2. On passe au cas général. Soient $\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $\vec{Y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(\vec{X}, \vec{Y})$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
3. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E, c'est-à-dire que Φ en plus d'être bilinéaire symétrique est définie et positive.
4. Soit $\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, déterminer les composantes de $f(\vec{X})$. Puis montrer que pour tout $\vec{X}$ de E,

   $$\Phi(f(\vec{X}), f(\vec{X})) = \Phi(\vec{X}, \vec{X}).$$

   On dit que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.
5. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
   Indication : on pourra utiliser l'algorithme de Jorgen Pedersen Gram (1850-1916)- Erhard Schmidt (1876-1959) à $(\vec{i}, \vec{j})$.
   Kultur : Jorgen Pedersen Gram vivait au Danemark et Erhard Schmidt vivait en D.D.R (Die deutsche demokratische Republik).
6. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ 0 & \frac{1}{\sin\theta} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer $P^{-1}CP$ et en déduire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$.
   Spécial 5/2 : Préciser la nature de f.