E.P.I.T.A. 2019

Corrigé de l'épreuve de mathématiques PT - TSI (3h)

■ PARTIE I : Etude de la fonction *S*

On exploite dans cette partie la série entière de la variable réelle t éventuellement définie par :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} = 1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \ldots .$$

1°) *Etude du domaine de définition des fonctions F et S*

a) Pour $|t| \geq 1$, on a $|t|^{n^2} \geq 1$ et le terme général t^{n^2} de la série $\sum t^{n^2}$ ne tend donc pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La série diverge donc car son terme général ne tend pas vers 0.

b) Pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geq n$, et comme $|t| < 1$, on a donc : $|t|^{n^2} \leq |t|^n$.
La série $\sum |t|^n$ est une série géométrique de raison $|t| < 1$. Elle converge donc et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |t|^n = \frac{1}{1 - |t|}.$$

Comme $|t|^{n^2} \leq |t|^n$, la convergence de la série $\sum |t|^n$ implique celle de la série $\sum |t|^{n^2}$.
Et comme une série absolument convergente est convergente, la série $\sum t^{n^2}$ converge si $|t| < 1$.

c) La série $\sum t^{n^2}$ converge donc pour $|t| < 1$ et diverge grossièrement pour $|t| \geq 1$.
Le domaine de définition de la fonction F est donc $]-1, 1[$.

d) D'après ce qui précède, la série $\sum e^{-x n^2} = \sum (e^{-x})^{n^2}$ converge donc si et seulement si $e^{-x} < 1$, donc si et seulement si $x > 0$, et on a dans ce cas :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^{n^2} = F(e^{-x}).$$

2°) *Premières propriétés des fonctions F et S*

a) La fonction F est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ car c'est la somme d'une série entière, et on sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle de convergence.

b) La fonction F est croissante sur $[0, 1[$ car sa dérivée y est positive :

$$F'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, t^{n^2-1} \geq 0.$$

Comme une fonction monotone sur un intervalle admet des limites finies ou infinies aux bornes de cet intervalle, on en déduit que la fonction F admet une limite finie ou infinie en 1.

c) Pour tout entier naturel N et pour tout réel t de $[0,\ 1[$, la série $\sum t^{n^2}$ est à termes positifs, donc :

$$F(t) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \ \geq \ \sum_{n=0}^{N} t^{n^2}.$$

En passant à la limite quand t tend vers 1, on a $\lim_{t \to 1} F(t) \geq N + 1$ (car les limites existent).
Comme l'entier N est quelconque, on en déduit que $\lim_{t \to 1} F(t) = +\infty$.

d) Comme $S(x) = F(e^{-x})$ pour $x > 0$, et comme une composée de fonctions de classe C^∞ est C^∞, on en déduit que la fonction S est de classe C^∞ sur $]\,0,\ +\infty[$.
Comme $x \longrightarrow e^{-x}$ est décroissante de $]\,0,\ +\infty[$ dans $]\,0,\ 1[$, comme F est croissante sur $]\,0,\ 1[$, la fonction $x \longrightarrow S(x) = F(e^{-x})$ est décroissante sur $]\,0,\ +\infty[$ et par composition des limites :

$$\lim_{x \to 0} S(x) \ = \ \lim_{x \to 0} F(e^{-x}) \ = \ \lim_{t \to 1} F(t) \ = \ +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) \ = \ \lim_{x \to +\infty} F(e^{-x}) \ = \ \lim_{t \to 0} F(t) \ = \ F(0) \ = \ 1.$$

3°) *Recherche d'un équivalent de* $S(x) - 1$ *quand* x *tend vers* $+\infty$

a) Pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel n, on a $n^2\, x \geq n\, x$, donc $e^{-x\,n^2} \leq e^{-x\,n}$, d'où :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \ \leq \ \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) Cette dernière somme est celle d'une série géométrique dont la raison est $e^{-x} < 1$, et dont le premier terme est $e^{-2\,x}$, d'où l'on déduit qu'on a lorsque x tend vers $+\infty$:

$$0 \ \leq \ S(x) - 1 - e^{-x} \ = \ \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \ \leq \ \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n} \ = \ \frac{e^{-2\,x}}{1 - e^{-x}} \ = \ \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, e^{-x} \ = \ o(e^{-x}).$$

On a donc $S(x) - 1 = e^{-x} + o(e^{-x}) \ \sim \ e^{-x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4°) *Recherche d'un équivalent de* $S(x)$ *quand* x *tend vers 0*

a) Comme la fonction $t \longrightarrow e^{-x\,t^2}$ est décroissante sur $[0,\ +\infty[$ pour tout réel $x > 0$, on a $e^{-x\,(n+1)^2} \ \leq \ e^{-x\,t^2} \ \leq \ e^{-x\,n^2}$ pour $n \leq t \leq n + 1$, d'où par intégration sur $[n,\ n + 1]$:

$$e^{-x\,(n+1)^2} \ \leq \ \int_n^{n+1} e^{-x\,t^2}\, \mathrm{d}t \ \leq \ e^{-x\,n^2}.$$

b) Par sommation de cette inégalité pour $n \geq 0$, on obtient l'inégalité suivante pour $x > 0$:

$$S(x) - 1 \ \leq \ \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\, \mathrm{d}t \ \leq \ S(x).$$

En effet, on a au premier membre : $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\,n^2} = S(x) - 1$.

c) En posant $u = t\sqrt{x}$ dans l'intégrale précédente, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\, \mathrm{d}t \ = \ \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

L'encadrement précédent obtenu ci-dessus à la sous-question b) implique donc :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1.$$

On retrouve ainsi que $\lim_{x \to 0} S(x) = +\infty$, et on en déduit que $S(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0.

5°) *Recherche d'une valeur approchée de* $S(x)$

a) En sommant pour $n \geq N$ l'inégalité obtenue en 4.a) (dans laquelle on a changé n en $n-1$), on obtient pour tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} e^{-x t^2}\, dt = \int_N^{+\infty} e^{-x t^2}\, dt.$$

b) En posant $u = x t^2$ dans cette dernière intégrale, donc $t = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}}$ et $dt = \frac{du}{2\sqrt{x}\sqrt{u}}$, il vient :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \int_N^{+\infty} e^{-x t^2}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du.$$

Dans cette dernière intégrale, on peut majorer $\frac{1}{\sqrt{u}}$ par $\frac{1}{N\sqrt{x}}$ (en minorant u par $x N^2$), d'où :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \int_N^{+\infty} e^{-x t^2}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \leq \frac{1}{2 N x} \int_{x N^2}^{+\infty} e^{-u}\, du = \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}.$$

En reprenant l'inégalité obtenue à la sous-question a), on a bien :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x n^2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-x t^2}\, dt \leq \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}.$$

c) Ce qui précède montre qu'on a pour $N \geq 1$: $\sum_{n=0}^{N} e^{-x n^2} \leq S(x) \leq \sum_{n=0}^{N} e^{-x n^2} + \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'algorithme suivant donne donc un encadrement de $S(x)$ à ε près :

$N := 1$; $S := 1 + e^{-x}$; Erreur $:= \frac{e^{-x}}{2x}$;

Tant que Erreur $> \varepsilon$ faire :

  $N := N + 1$; $S := S + e^{-x N^2}$; Erreur $:= \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}$;

Ecrire N et S ;

d) Avec $x = 1$ et $\varepsilon = 10^{-7}$, on obtient $N = 4$ et $S = 1,38\,631\,860\ldots$, d'où l'encadrement suivant :

$$1,3\,863\,186 \leq S(1) \leq 1,3\,863\,187.$$

■ PARTIE II : Calcul de l'intégrale de Gauss

6°) *Convergence de l'intégrale de Gauss I*

a) Pour tout réel $t \geq 1$, on a $t^2 \geq t$, donc $-t^2 \leq -t$, d'où : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

b) L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le calcul suivant :

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_1^{x} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-1}-e^{-x}\right) = e^{-1}.$$

c) Comme on a $0 \le e^{-t^2} \le e^{-t}$ pour $t \ge 1$, et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, on voit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, $\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe bien en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Donc l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

7°) *Etude des intégrales de Wallis*

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale de Wallis W_n par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) On a donc $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

b) A l'aide d'une intégration par parties du produit $\cos^{n+1}(t) = \cos(t)\cos^n(t)$, on obtient :

$$\forall\, n \ge 1,\quad W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)\cos^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet ci-dessus est nul, et en remplaçant $\sin^2(t)$ par $1-\cos^2(t)$, on obtient :

$$\forall\, n \ge 1,\quad W_{n+1} = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = n\,(W_{n-1}-W_{n+1}).$$

Il en résulte que : $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}\,W_{n-1}$, d'où l'on déduit en multipliant par $(n+1)\,W_n$:

$$\forall\, n \ge 1,\quad (n+1)\,W_{n+1}\,W_n = n\,W_n\,W_{n-1}.$$

Ainsi, la suite $n \longrightarrow n\,W_n\,W_{n-1}$ est constante, donc égale à son premier terme $W_1\,W_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\forall\, n \ge 1,\quad n\,W_n\,W_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Comme $\cos^{n+1}(t) \le \cos^n(t)$ pour $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, la suite $n \longrightarrow W_n$ est décroissante :

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = W_n.$$

On a donc $W_{n+1} \le W_n \le W_{n-1}$, d'où l'on déduit compte tenu de $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}\,W_{n-1}$:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \le \frac{W_n}{W_{n-1}} \le \frac{W_{n-1}}{W_{n-1}} = 1.$$

Comme $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, on obtient l'équivalence $W_{n-1} \sim W_n$.

d) D'après ce qui précède, on a donc :

$$n\,W_n^2 \sim n\,W_n\,W_{n-1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad W_n^2 \sim \frac{\pi}{2\,n}.$$

On en déduit l'équivalence : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puisque :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{W_n^2}{\frac{\pi}{2n}}} = \sqrt{\lim_{n \to +\infty} \frac{W_n^2}{\frac{\pi}{2n}}} = 1.$$

8°) *Calcul de l'intégrale de Gauss I*

a) Pour tout réel $x > -1$, on obtient l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ en étudiant la fonction définie par $y = \ln(1+x) - x$ sur $]-1, +\infty[$. Comme sa dérivée est $y' = \frac{-x}{1+x}$, on voit que :

- sur $]-1, 0]$, y est croissante jusqu'à sa valeur en 0 qui est 0.
- sur $[0, +\infty[$, y est décroissante à partir de sa valeur en 0 qui est 0.

Ainsi donc, y est bien toujours négative, ce qui justifie l'inégalité annoncée.

En particulier, pour $0 \leq t < \sqrt{n}$, on a en changeant x en $\pm \frac{t^2}{n}$ (qui appartient à $]-1, 1[$) :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}.$$

b) De l'inégalité ci-dessus résulte en prenant l'exponentielle et en élevant à l'exposant n que :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{t^2}.$$

Ces inégalités larges sont valables sur $\left[0, \sqrt{n}\right[$ et se prolongent par continuité sur $\left[0, \sqrt{n}\right]$.

Et la dernière inégalité donne par passage à l'inverse : $e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ pour $0 \leq t \leq \sqrt{n}$.

En intégrant ces inégalités sur $\left[0, \sqrt{n}\right]$, on obtient donc pour $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

c) En effectuant le changement de variables $t = \sqrt{n}\, \sin(u)$ dans la première de ces intégrales, et $t = \sqrt{n}\, \tan(u)$ dans la dernière de celles-ci, il vient :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(u)\right)^n \cos(u)\, \mathrm{d}u \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(u)\right)^{-n} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)}.$$

Compte tenu de $1 - \sin^2 = \cos^2$ et $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, on obtient :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(u)\, \mathrm{d}u \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\, \mathrm{d}u.$$

Dans cette dernière intégrale, la fonction intégrée $u \longrightarrow \cos^{2n-2}(u)$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Son intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ est donc inférieure à son intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui donne alors :

$$\sqrt{n}\ W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leq \sqrt{n}\ W_{2n-2}.$$

d) Comme on a $W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ et $W_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\ W_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\ W_{2n-2} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Les deux extrémités de l'inégalité précédente ont même limite $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où résulte que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.