CORRECTION

EXERCICE 01

1.a H est la somme d'une série entière. Déterminons son rayon de convergence. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p(x) = \dfrac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}$.

$$\left|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \left|\frac{\dfrac{x^{2p+2}}{4^{p+1}((p+1)!)^2}}{\dfrac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}}\right| = \left|\frac{\dfrac{x^{2p+2}}{4^{p+1}((p+1)!)^2} \times 4^p(p!)^2}{x^{2p}}\right| = \frac{x^2}{4(p+1)^2}.$$

Cette quantité tend vers 0 quand p tend vers l'infini pour tout x fixé non nul. Donc la série converge absolument pour tout x et donc $R = +\infty$. On peut conclure.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}.$$

1.b Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $u_p(x) > 0$, $H(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^\star$ et $H(0) = 1$. Donc $H(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De plus, on sait que tout développement en série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ donc ici sur $\mathbb{R}$.

1.c On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2px^{2p-1}}{4^p(p!)^2}$ et $H''(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2p(2p-1)x^{2p-2}}{4^p(p!)^2}$.

Alors $xH''(x) + H'(x) - xH(x)$ vaut :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2p(2p-1)x^{2p-1}}{4^p(p!)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2px^{2p-1}}{4^p(p!)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{4^p(p!)^2},$$

c'est-à-dire en regroupant les deux premières sommes,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2p}{4^p(p!)^2}((2p-1)+1)x^{2p-1} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{4^p(p!)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p-1}}{4^{p-1}((p-1)!)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{4^p(p!)^2}.$$

Il reste à changer l'indice dans la première somme.

$$xH''(x) + H'(x) - xH(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{4^p(p!)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{4^p(p!)^2} = 0.$$

2.a On part de $y(x) = \lambda(x)H(x)$ pour tout $x \in I$.

$$y'(x) = \lambda'(x)H(x) + \lambda(x)H'(x),\ y''(x) = \lambda''(x)H(x) + 2\lambda' H'(x) + \lambda(x)H''(x).$$

Puis on remplace dans $xy''(x) + y'(x) - xy(x)$ qui devient :

$$x\lambda''(x)H(x) + 2x\lambda' H'(x) + x\lambda(x)H''(x) + \lambda'(x)H(x) + \lambda(x)H'(x) - x\lambda(x)H(x).$$

On arrange. Et $xy''(x) + y'(x) - xy(x)$ devient :

$$x\lambda''(x)H(x) + 2x\lambda' H'(x) + \lambda'(x)H(x) + \lambda(x)\left(xH''(x) + H'(x) - xH(x)\right).$$

Comme $xH''(x) + H'(x) - xH(x) = 0$, on a : $x\lambda''(x)H(x) + 2x\lambda' H'(x) + \lambda'(x)H(x) = 0$.

2.b. • Résolvons $xH(x)z' + (2xH'(x) + H(x))z = 0$.
Posons $a(x) = xH(x)$ et $b(x) = 2xH'(x) + H(x)$. On sait que les solutions sont de la forme

$$z : x \mapsto K \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right),\ K \in \mathbb{R}.$$

Ici : $\displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx = \int \frac{2xH'(x) + H(x)}{xH(x)}\,dx = 2\int \frac{H'(x)}{H(x)}\,dx + \int \frac{dx}{x}$.

Ainsi, à une constante multiplicative près, $\displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx = 2\ln(H(x)) + \ln x = \ln(x(H(x))^2)$.

Et $z : x \mapsto \dfrac{K}{x(H(x))^2}$, $K \in \mathbb{R}$ sont les solutions de (E_1).

• Ensuite, on remarque que $\lambda' = z \Rightarrow \lambda(x) = K\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t(H(t))^2} + \mu$, où $\mathbb{K}$ et μ sont deux constantes réelles.

$$\forall x \in I,\ y(x) = KH(x)G(x) + \mu H(x).$$

On remarque au passage que l'ensemble des solutions de (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2 de base (H, HG).

3.a. On pose $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Alors $xy''(x) + y'(x) - xy(x)$ vaut :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}.$$

On effectue des changements d'indice dans toutes les sommes. Finalement $xy''(x) + y'(x) - xy(x)$ vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 2,$$

ou encore :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)n a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_{n-1}\right)x^n + a_1 = 2.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1}$ et $a_1 = 2$.

3.b Partons de $a_n = \dfrac{1}{n^2} a_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

• Supposons n pair donc $n = 2p$ avec p entier non nul.

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{2p} & = & \dfrac{1}{(2p)^2} a_{2p-2} \\ a_{2p-2} & = & \dfrac{1}{(2p-2)^2} a_{2p-4} \\ \dots & & \vdots \\ a_2 & = & \dfrac{1}{2^2} a_0 \end{array}\right. \Rightarrow a_{2p} = \frac{a_0}{(2p)^2 \times (2p-2)^2 \times \dots \times 2^2} = \frac{a_0}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Et finalement, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \dfrac{a_0}{2^{2p}(p!)^2}$.

- Supposons n impair donc $n = 2p+1$ avec p entier.

$$\begin{cases} a_{2p+1} & = & \dfrac{1}{(2p+1)^2}a_{2p-1} \\ a_{2p-1} & = & \dfrac{1}{(2p-1)^2}a_{2p-3} \\ \dots & & \vdots \\ a_3 & = & \dfrac{1}{3^2}a_1 \end{cases} \Rightarrow a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p+1)^2 \times (2p-1)^2 \times ... \times 3^2}.$$

On arrange a_{2p+1}.

$$a_{2p+1} = \frac{a_1(2p)^2 \times (2p-2)^2 \times ... \times 2^2}{((2p+1)!)^2} = \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{((2p+1)!)^2}.$$

3.c On écrit : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2^p p!)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1}$.

Posons alors pour tout x possible, $y_0(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 H(x) + y_0(x).$$

Posons pour $p \in \mathbb{N}$, $v_p(x) = \dfrac{2^{2p+1}(p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1}$. Déterminons le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} v_p(x)$.

$$\left| \frac{v_{p+1}(x)}{v_p(x)} \right| = \left| \frac{\dfrac{2^{2p+3}((p+1)!)^2}{((2p+3)!)^2} x^{2p+3}}{\dfrac{2^{2p+1}(p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1}} \right| = \left| \frac{2^2 x^2 (p+1)^2}{((2p+12)(2p+3))^2} \right| \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{4p^2x^2}{16p^4},$$

quantité tendant vers 0 quand p tend vers l'infini pour tout x fixé non nul. Donc la série converge absolument pour tout x et donc $R = +\infty$.

Alors $y_0(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1}$ est une solution particulière de (E_2) (celle développable en série entière avec $a_0 = 0$ ou encore qui s'annule en 0) et si y est une autre solution dévellopable en série entière de (E_2), alors $y(x) = KH(x) + y_0$, où $K = y(0)$.
On remarque que $y - y_0$ est bien une solution de l'équation différentielle (E_0) (car KH pour tout $K \in \mathbb{R}$ est solution de (E_0)).

EXERCICE 02

1. Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé. On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations (1) :

$$\Phi(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \Phi(\vec{\jmath}, \vec{\imath}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{\imath}, \vec{\imath}) = \Phi(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables. En utilisant les relations (1) et le fait que Φ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et que Φ est symétrique, c'est-à-dire que $\Phi(\vec{X}, \vec{Y}) = \Phi(\vec{Y}, \vec{X})$ pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de vecteurs du plan, calculons $\Phi(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$ en fonction de θ.
On développe $\Phi(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$ par rapport à chacune des variables. On trouve :

$$\Phi(2\vec{\imath}, \vec{\imath}) + \Phi(2\vec{\imath}, 3\vec{\jmath}) + \Phi(-\vec{\jmath}, \vec{\imath}) + \Phi(-\vec{\jmath}, 3\vec{\jmath}).$$

Cela donne :

$$2\Phi(2\vec{\imath}, \vec{\imath}) + 6\Phi(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) - \Phi(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) - 3\Phi(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}).$$

Ou encore :

$$2 + 5\Phi(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) - 3 = -1 + 5\cos\theta.$$

2. On passe au cas général. Soient $\vec{X} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath}$ et $\vec{Y} = y_1\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ deux vecteurs de E. Exprimons $\Phi(\vec{X}, \vec{Y})$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
On utilise la bilinéarité de Φ et son caractère symétrique. Il vient

$$\begin{aligned}\Phi\big(x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath}, y_1\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}\big) &= x_1y_1\Phi\big(\vec{\imath}, \vec{\imath}\big) + x_2y_2\Phi\big(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}\big) + x_1y_2\Phi\big(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\big) + x_2y_1\Phi\big(\vec{\jmath}, \vec{\imath}\big)\\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\cos\theta\\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cette expression matricielle peut s'avérer pratique.

3. Montrons que Φ est un produit scalaire sur E, c'est-à-dire que Φ en plus d'être bilinéaire symétrique est définie et positive.
Pour montrer que Φ est un produit scalaire, il reste à étudier $\Phi\big(\vec{X}, \vec{X}\big)$.

$$\begin{aligned}\Phi\big(\vec{X}, \vec{X}\big) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\theta = \big(|x_1| - |x_2|\big)^2 + 2|x_1x_2|(1 \pm \cos\theta)\\ &\geq \big(|x_1| - |x_2|\big)^2 + 2|x_1x_2|\big(1 - |\cos\theta|\big) \geq 0.\end{aligned}$$

De plus, $\Phi\big(\vec{X}, \vec{X}\big)$ étant la somme de deux quantités positives et l'hypothèse $0 < \theta < \pi$ assurant que $|\cos\theta| < 1$, elle est nulle si, et seulement si, $|x_1| = |x_2|$ et $|x_1x_2| = 0$, donc si, et seulement si $\vec{X} = \vec{0}$. Ainsi, Φ est bien un produit scalaire sur E. (On pouvait aussi écrire plus naturellement

$$\Phi\big(\vec{X}, \vec{X}\big) = (x_1 + x_2\cos\theta)^2 + (1 - \cos^2\theta)x_2^2).$$

4. • Soit $\vec{X} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath}$, déterminons les composantes de $f(\vec{X})$.

$$f\big(\vec{X}\big) = x_1\vec{\jmath} + x_2\big(-\vec{\imath} + 2\cos\theta\vec{\jmath}\big) = -x_2\vec{\imath} + \big(x_1 + 2\cos\theta x_2\big)\vec{\jmath}.$$

- Montrons que pour tout $\vec{X}$ de E, $\Phi(f(\vec{X}), f(\vec{X})) = \Phi(\vec{X}, \vec{X})$.

$$\begin{aligned}\Phi\left(f(\vec{X}), f(\vec{X})\right) &= (-x_2)^2 + \left(x_1 + 2\cos\theta x_2\right)^2 - 2x_2\left(x_1 + 2\cos\theta x_2\right)\cos\theta \\ &= x_1^2 + (1 + 4\cos^2\theta - 4\cos^2\theta)x_2^2 + (4-2)\cos\theta x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\theta = \Phi\left(\vec{X}, \vec{X}\right).\end{aligned}$$

5. Déterminons un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.

On utilise le procédé de Gram-Schmidt en orthonormalisant la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On écrit : $\begin{cases} \vec{V_1} &= \vec{i} \\ \vec{V_2} &= \vec{j} + a\vec{i} \end{cases}$ avec $\Phi(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = 0$. On écrit :

$$\Phi(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = \Phi(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) + a\Phi(\vec{\imath}, \vec{\imath}) = \cos\theta + a = 0.$$

On en déduit que $a = -\cos\theta$. Ainsi $\vec{V_2} = \vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{\imath}$. Puis on a :

$$\Phi(\vec{V_1}, \vec{V_1}) = \Phi(\vec{\imath}, \vec{\imath}) = 1.$$

Et il reste à développer :

$$\Phi(\vec{V_2}, \vec{V_2}) = \Phi(-\cos\theta\,\vec{\imath} + \vec{\jmath},\ -\cos\theta\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}).$$

On trouve :

$$\cos^2\theta\,\Phi(\vec{\imath},\ \vec{\imath}) - \cos\theta\,\Phi(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}) - \cos\theta\,\Phi(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}) + \Phi(\vec{\jmath},\ \vec{\jmath}).$$

Ou encore :

$$1 + \cos^2\theta - 2\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \|\vec{V_2}\|^2.$$

Comme $\theta \in]0, \pi[$, $1 - \cos^2\theta > 0$. Et donc :

$$\vec{k} = \frac{\vec{V_2}}{\|\vec{V_2}\|^2} = \frac{-\cos\theta\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{-\cos\theta\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sin\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\vec{i} + \frac{1}{\sin\theta}\vec{j}.$$

6.a On pose : On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ & \\ 0 & \frac{1}{\sin\theta} \end{pmatrix}$. Montrons que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$.

Il suffit de faire $P^{-1}P = I_2$.

6.b Calculons $P^{-1}CP$ et déduisons en la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{k})$.

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta/\sin\theta \\ 0 & 1/\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Et cette dernière matrice est la matrice de f dans $(\vec{\imath},\ \vec{k})$.

Spécial 5/2 : Précisons la nature de f.

On a donc $Mat_{(\vec{\imath}, \vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et f est bien entendu la rotation d'angle θ.