CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES

Colle 18

Du 10 février 2025 au 14 février 2025

Probabilités sur un univers dénombrable

Révision colle 17.

Variables aléatoires réelles sur un univers dénombrable

Cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. Fonction de répartition. Extension de la notion de l'espérance $E(X)$ si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(X=x_n)x_n$ converge absolument. Extension de la notion de la variance $V(X)$ si de plus la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(X=x_n)x_n^2$ converge. Théorème de transfert : $E(f(X))$ vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=x_n)f(x_n)$ si cette série converge absolument. $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ si X et Y sont indépendantes. Indépendance de (X_i), pour i variant de 1 à n.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev —.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que X^2 soit d'espérance finie, alors :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P\big(|X-E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.}$$

Lois usuelles : loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique et loi de Poisson. Espérance et variance de ces lois.

Si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p_n)$ et si $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Know-how :

Sur les probabilités :

1) Savoir chercher une probabilité comme rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles (dans le cas d'équiprobabilité).
2) Savoir calculer la probabilité d'un évenement contraire et repasser à la probabilité de l'événement.
3) Savoir reconnaître l'indépendance deux à deux ou l'indépendance et l'appliquer.
4) Savoir utiliser la formule de Bayes et savoir passer de $P_A(B)$ Ã $P_B(A)$.
5) Savoir utiliser $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$ pour aboutir à la formule des probabilités totales.
6) Savoir utiliser la formule des probabilités composées dans des cas simples.

Sur les V.A.R

1) Savoir reconnaître une loi géométrique et calculer des probabilités avec.
2) Savoir reconnaître une loi de Bernoulli ou une loi binomiale, connaître $P(X=k)$ et $E(X)$, $V(X)$.
3) Connaiître l'espérance et la variance d'une loi géométrique ou une loi de Poisson.
4) Caractériser l'indépendance deux à deux et l'indépendance.
5) Savoir utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
6) Savoir faire une approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
7) Savoir calculer $E(\phi(X))$ dans des cas simples.