TSI2. Devoir libre 07

A rendre jeudi 13 février 2025 au plus tard

Instructions

Questions difficiles en bonus : Partie I question 3, question 8, question 10 et partie III question 2 et question 3

Dans tout le problème, a désigne un **entier non nul**. On considère une urne contenant a boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.

PARTIE I. Une première expérience aléatoire

On réalise l'expérience aléatoire suivante en deux temps :

Phase 1. *On commence par tirer les boules une par une* **sans remise** *jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.*

Phase 2. *Ensuite, on remet toutes les boules dans l'urne et si $n \in \mathbb{N}^\star$ tirages ont été effectués lors de la phase 1, on réalise n tirages successifs* **avec remise**. *On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la boule noire a été tirée dans cette seconde série de tirages.*

Pour tout entier $i \in [\![1, a+1]\!]$, on note B_i l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est blanche » et R_i l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est noire ».

1. Pour tout $n \in [\![1, a+1]\!]$, exprimer l'événement $(N = n)$ en fonction des événements R_i et B_i.
2. On suppose **dans cette question seulement** $a = 3$. En utilisant la formule des probabilités composées, calculer $P(N = n)$ pour tout $n \in [\![1, 4]\!]$. Que remarque t-on ?
3. On reprend le cas général à partir de cette question. Montrer que $P(N = n) = \dfrac{1}{a+1}$ pour tout $n \in [\![1, a+1]\!]$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier m non nul,
$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$
5. Calculer l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$.
6. Pour tout couple d'entiers $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, on considère la probabilité de $(X = k)$ sachant $(X = n)$, c'est-à-dire $P_{(N=n)}(X = k)$.
   (a) Que vaut $P_{(N=n)}(X = k)$ pour $k \geqslant n+1$?
   (b) Justifier que $P_{(N=n)}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, où p et q sont à déterminer.
7. Exprimer $P(X = k)$ pour tout entier k sous forme d'une somme en utilisant la formule des probabilités totales.
8. Montrer que $P(X = 0) = q(1 - q^{a+1})$, où q est le réel trouvé à la question **6-b**.
9. Pour tous entiers k et n non nuls, exprimer $k\dbinom{n}{k}$ en fonction de $\dbinom{n-1}{k-1}$.
10. En admettant que l'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{a+1} \left(\sum_{k=0}^{n} k P_{(N=n)}(X = k) \times P(N = n) \right)$, calculer l'espérance $E(X)$ en fonction de a.

PARTIE II. Sommes de séries entières

On suppose ici $k \in \mathbb{N}$ fixé et on pose $S_k(x)$ la somme si elle existe de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.

1. Montrer que pour n tendant vers $+\infty$, $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$.
2. Déterminer, en utilisant la question **1** de cette **partie II**, le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.
3. Pour tout $x \in]-R, R[$, calculer $S_0(x)$ puis montrer que $S_1(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

4. Calculer la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction
$$f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$
5. En déduire que pour tout $x \in]-R, R[$, $S_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
6. Pour tout $x \in]-R, R[$, établir que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

PARTIE III. Une deuxìeme expérience aléatoire

On réalise l'expérience aléatoire suivante en deux temps :

Phase 1. *On commence par tirer les boules une par une* ***avec remise*** *jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note T la variable aléatoire qui indique le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.*

Phase 2. *Ensuite, on remet la boule noire dans l'urne et si $n \in \mathbb{N}^\star$ tirages ont été effectués lors de la phase 1, on réalise n tirages successifs* **avec remise**. *On note Y la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la boule noire a été tirée dans cette seconde série de tirages.*

Pour tout entier $i \in \mathbb{N}^\star$, on note B_i l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est blanche » et R_i l'événement : « la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage de la phase 1 est noire ».

1. **Étude de** T
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer l'événement $(T = n)$ en fonction des événements B_i et R_i. Calculer $P(T = 1)$ et $P(T = n)$ pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$.
   (b) Quelle est la loi suivie par T ? Écrire alors l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de deux façons : directement en utilisant le cours pour la première façon et en calculant des sommes avec les résultats de la **partie II** pour la seconde façon.
   (c) On note A l'événement : « La boule noire n'est jamais tirée (lors de la phase 1) ».
   Calculer $P(A)$ en remarquant que $\overline{A} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} (T = n)$.
2. **Étude de la loi de** Y
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $P_{(T=n)}(Y = k)$.
   (On pourra s'inspirer du résultat de la question **6** de la **partie I**.)
   (b) Montrer que $P(Y = 0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(P_{(T=n)}(Y = 0) \times P(T = n)\big) = \frac{a}{2a+1}$.
   (c) On suppose $k \geqslant 1$. Montrer :
$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \big(P_{(T=n)}(Y = k) \times P(T = n)\big) = \frac{(a+1)^2}{a(2a+1)} r^k,$$
   où r est un réel vérifiant $0 < r < 1$ à déterminer en fonction de a.
3. **Calcul de l'espérance de** Y. On veut calculer $E(Y)$ de deux manières.
   (a) **Première méthode**. Calculer $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kP(Y = k)$ en utilisant le résultat de la question **2-c** de cette **partie III** et le calcul de $S_1(x)$ de la **partie II**.
   (b) **Deuxième méthode**. Simplifier pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{a+1}\right)^j \cdot \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1-j}$.
   Justifier ensuite que :
$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} kP_{(T=n)}(Y = k) \times P(T = n) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} kP_{(T=n)}(Y = k) \times P(T = n) \right).$$
   Calculer alors cette double somme en utilisant la question **9** de la **partie I**. Retrouver ainsi la valeur de $E(Y)$ trouvée à la question **3-a**.