Corrigé CCINP 2022
Maths - TSI

Problème I

Partie I

Q1 On a pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Q2 On applique la formule précédente avec $a = X$, $b = 1$, $n = k$ et on obtient

$$(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i.$$

Q3 Par calcul direct, on a

$$\begin{aligned}
\phi(P_0)(X) &= 1 - 1 = 0 \\
\phi(P_1)(X) &= X + 1 - X = 1 \\
\phi(P_2)(X) &= (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1 \\
\phi(P_3)(X) &= (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1.
\end{aligned}$$

Q4 On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
\phi^2(P_2)(X) &= \phi(\phi(P_2))(X) = (2(X+1)+1) - (2X+1) = 2 \\
\phi^3(P_2)(X) &= \phi(\phi^2(P_2))(X) = 0
\end{aligned}$$

Q5 Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\phi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$ ainsi

$$\deg(\phi(P)(X)) \leq \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X)))$$

i.e. $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Par ailleurs, pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda P + Q)(X) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\
&= \lambda P(X+1) - \lambda P(X) + Q(X+1) - Q(X) \\
&= \lambda \phi(P)(X) - \phi(Q)(X)
\end{aligned}$$

ainsi ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6 Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathrm{H}(k)$: « si P est un polynôme de degré k, alors $\phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$ ».
Initialisaiton : $k = 1$
Soit P un polynôme de degré 1, que l'on écrit $P(X) = a_1 X + a_0$ avec $a_1 \in \mathbb{R}^*$ et $a_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\phi(P)(X) = a_1$ i.e. $\deg(\phi(P)) = 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie pour tout $1 \leq i \leq k$. Montrons $\mathrm{H}(k+1)$.
Soit P un polynôme de degré $k+1$, que l'on écrit $P(X) = a_{k+1} X^{k+1} + Q(X)$ avec $a_{k+1} \in \mathbb{R}^*$ et $Q \in \mathbb{R}_k[X]$. Alors on a par linéarité de ϕ

$$\begin{aligned}\phi(P)(X) &= a_{k+1}\phi(X^k)+\phi(Q)\\ &= a_{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^k+\phi(Q)\end{aligned}$$

avec $\deg(\phi(Q)) \leq k-1$ par hypothèse de récurrence et $\deg\left(a_{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^k\right) = k$. Ainsi $\deg(\phi(P)) = k$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q7 D'après la question précédente, si P est de degré $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\phi(P)$ est degré $k-1$ donc non nul ainsi $\ker(\phi) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_0[X]$, on a directement $\phi(P)(X) = 0$. Ainsi

$$\ker(\phi) = \mathbb{R}_0[X].$$

Q8 D'après la question 6, si P est de degré $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\phi(P)$ est degré $k-1$, d'où par linéarité de ϕ

$$\mathrm{Im}(\phi) = \phi(\mathbb{R}_n[X]) \supset \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

. D'après le théorème du rang, comme le noyau est de dimension 1, $\mathrm{Im}(\phi)$ est de dimension $\dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. On a donc : $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q9 On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} P(i) &= \sum_{i=0}^{n}\phi(Q)(i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} Q(i+1)-Q(i)\\ &= Q(n+1)-Q(0)\end{aligned}$$

car on reconnaît une somme téléscopique.

Partie II

Q10 Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$ on a $H_i(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(H_i) = i$, ainsi la famille $(H_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est échelonnée en degré et de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc cette famille est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q11 Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X est en facteur de $H_i(X)$, ainsi $H_i(0) = 0$.

Q12 Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\phi(H_i)(X) &= \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(X+1-k)}{i!} - \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(X-k)}{i!}\\ &= \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(X+1-k)}{i!}\left(X+1-(X-i+1)\right)\\ &= \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(X+1-k)}{(i-1)!}\\ &= H_{i-1}(X)\end{aligned}$$

Q13 En itérant la question précédente, on obtient pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$\phi^i(H_i)(X) = H_0(X) = 1.$$

Q14 D'après la question 11, on a pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $H_i(0) = 0$ donc

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(0) = a_0 H_0(0) = a_0.$$

Par ailleurs, d'après la question 13 et par linéarité de ϕ on a pour tout $l \in [\![1;n]\!]$

$$\begin{aligned}
\phi^l(P)(0) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \phi^l(H_k)(0) \\
&= \sum_{k=l}^{n} a_k \phi^l(H_k)(0) \text{ car pour } k < l\,,\ \phi^l(H_k) = 0 \\
&= \sum_{k=l}^{n} a_k H_{k-l}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-l} a_{k+l} H_k(0) \text{ par changement d'indice} \\
&= a_l \text{ par la question 11}
\end{aligned}$$

Q15 D'après la question précédente, on peut écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X) = \sum_{k=0}^{n} \phi^k(P)(0) H_k(X).$$

Q16 Puisque $H_0(X) = 1$ et $H_1(X) = X$, on a bien

$$X = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X).$$

Q17 D'après les questions précédentes, on peut écrire $X = \phi(Q)(X)$ avec $Q(X) = H_2(X)$. Ainsi, en appliquant la question 9, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k &= Q(n+1) - Q(0) \\
&= H_2(n+1) - H_2(0) \\
&= \frac{(n+1)n}{2!} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Q18 Puisque Puisque $H_0(X) = 1$, $H_1(X) = X$ et $H_2(X) = \dfrac{1}{2}(X^2 - X)$, on a bien

$$X^2 = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) + 2 \times H_2(x).$$

Q19 D'après les questions précédentes, on peut écrire $X = \phi(Q)(X)$ avec $Q(X) = H_2(X) + 2H_3(X)$. Ainsi, en appliquant la question 9, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= Q(n+1) - Q(0)\\ &= 2H_3(n+1) + H_2(n+1) - (2H_3(0) + H_2(0))\\ &= 2\frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{(n+1)n}{2!}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Q20 On propose la fonction suivante.

```
def sommeCube(n):
    S=0
    for i in range(n+1):
        S=S+i**3
    return S
```

Problème II

Partie I

Q21 On a $0+0+0=0$ donc O de coordonnées $(0,0,0)$ appartient au plan $(\mathcal{S})$. De même, on a $1+0-1=0$ et $\frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2}=0$, donc les points M et N appartiennent à $(\mathcal{S})$.

Q22 On a $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \in (\mathcal{S})$ et ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre. Par ailleurs, puisque $\dim((S)) = 2$, ces vecteurs forment bien une base de $(\mathcal{S})$.

Q23 Un calcul direct nous donne $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = (1,1,1)$.

Q24 La norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ représente l'aire du parallélogramme défini par ces deux vecteurs.

Q25 On a $0+1+1 \neq 0$ i.e. les coordonnées du point A ne vérifient pas l'équation définissant $(\mathcal{S})$, ainsi $A \notin (\mathcal{S})$.

Q26 Un calcul direct nous donne $\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA}\right] = 2$.

Q27 Le produit mixte des vecteurs précédents représente le volume orienté du parallélépipède formé par ces vecteurs.

Q28 Puisque $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \in (\mathcal{S})$ forment bien une base de $(\mathcal{S})$, $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON}}{||\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON}||} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ est un vecteur normal unitaire au plan $(\mathcal{S})$. On le normalise par anticipation sur la question suivante.

Q29 Le projeté orthogonal A' de A sur la plan $\mathcal{S}$ est donnée par (on « enlève » la composante suivant le vecteur normal au plan)

$$p_{(\mathcal{S})}\left(\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} - < \overrightarrow{n}, \overrightarrow{OA} > \overrightarrow{n} = \frac{1}{3}(-2,1,1).$$

Ainsi A' a pour coordonnées $\frac{1}{3}(-2,1,1)$.

Q30 La distance est donnée par

$$\mathrm{d}\left(A, (\mathcal{S})\right) = ||\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'}|| = || < \overrightarrow{n}, \overrightarrow{OA} > \overrightarrow{n}|| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Partie II

Q31 On pourrait caculer le déterminant, mais on remarque que : $\overrightarrow{u_x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)$ et $\overrightarrow{u_y} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1,2,-1)$. Or $((1,0,-1)|(-1,2,-1)) = 0)$. Donc $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$, qui sont colinéaires à deux vecteurs orthogonaux, sont également orthogonaux. On prouverait de manière analogue que $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ d'une part, et $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{u_x}$ sont également orthogonaux. La famille est donc orthogonale et ne contient pas le vecteur nul. Il s'agit donc d'une famille libre, de trois vecteurs, dans un espace de dimension trois, donc :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

Q32 Nous avons déjà montré que $\mathcal{B}'$ était orthogonale. Il suffit donc de montrer que ces trois vecteurs sont normés.
$||\overrightarrow{u_x}|| = ||\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)|| = |\frac{\sqrt{2}}{2}| \cdot ||(1,0,-1)|| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$. De même pour $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$.

$$\text{Donc } \mathcal{B}' \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^3.$$

Q33 $\mathcal{B}'$ étant une base orthonormale, elle est soit directe, soit indirecte. C'est-à-dire que $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \pm\overrightarrow{u_z}$. Pour déterminer le signe, il suffit de calculer la première composante de $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y}$ et de la comparer à celle de $\overrightarrow{u_z}$. Or $\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{6}6 & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} > 0$, tout comme celle de la première composante de $\overrightarrow{u_z}$. Donc le signe est positif. Ainsi :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base orthonormale directe de } \mathbb{R}^3.$$

Q34 Par définition de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \end{array}$$

Q35 $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ étant une matrice de passage entre deux bases orthonormales, c'est une matrice orthogonale et, à ce titre, son inverse est sa transposée. Or son inverse est aussi $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Ainsi :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Q36 Remarquons que $\overrightarrow{u_z} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (1,1,1)$. Ainsi : $\vec{n} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \overrightarrow{u_z}$.

$$\vec{n} \text{ a pour composantes } (0,0,\sqrt{3}) \text{ dans la base } \mathcal{B}'.$$

Q37 $\vec{n}$ étant un vecteur normal au plan (S), un vecteur $\vec{u}$ de (S) est caractérisé par $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 0$ soit $\sqrt{3}Z = 0$ soit $Z = 0$.

$$\text{Une équation de } (S) \text{ dans } \mathcal{B}' \text{ est donc : } Z = 0.$$

Q38 Comme (S) est normal à $\vec{n}$, donc à $\overrightarrow{u}_z$, $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ est une base orthonormale de (S). La projection orthogonale r sur (S) est donc définie par : $r(\vec{u}) = (\vec{u}|\overrightarrow{u_x}) \cdot \overrightarrow{u_x} + (\vec{u}|\overrightarrow{u_y}) \cdot \overrightarrow{u_y}$. Or $r(\overrightarrow{u_x}) = (\overrightarrow{u_x}|\overrightarrow{u_x}) \cdot \overrightarrow{u_x} + (\overrightarrow{u_x}|\overrightarrow{u_y}) \cdot \overrightarrow{u_y}$, et comme $\overrightarrow{u_x}$ est normalisé et que $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_x}$ sont orthogonaux : $r(\overrightarrow{u_x}) = \overrightarrow{u_x}$. De même : $r(\overrightarrow{u_y}) = \overrightarrow{u_y}$. Et comme $\overrightarrow{u_z}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$, $r(\overrightarrow{u_x}) = 0$. Ainsi :

$$R = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r(\overrightarrow{u_x}) & r(\overrightarrow{u_y}) & r(\overrightarrow{u_z}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_z} \end{array}$$

Q39 D'après la formule de changement de base, on a :
$Mat(r,\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} \times Mat(r,\mathcal{B}') \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, soit :

$$Q = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} R P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Q40 Q est donc une matrice semblable à R qui est une matrice diagonale. Elle est donc diagonalisable et a les mêmes valeurs propres que R. Ainsi :

Q est diagonalisable et de spectre $\{0,1\}$, 1 étant de multiplicité 2.

Q41 D'après ce qui précède, le sous espace propre de R associé à la valeur propre 1 est :

$$E_1 = \text{Vect}(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}).$$

Or $\overrightarrow{u_x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{ON}$. Ainsi :

E_1 est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$.

Partie III

Q42 Dans le plan (S), le point de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{B}$ de l'espace a pour coordonnées (x,y) dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ de (S). Or un point M de coordonnées (x,y) appartient à la droite D_λ si, et seulement si, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_\lambda}$ sont liés, soit encore $\det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_\lambda}) = 0$. Or $\det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_\lambda}) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & \lambda \end{vmatrix} = x\lambda - y$. Ainsi,

une équation de D_λ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est : $\lambda x - y = 0$.

Q43 D_λ est la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{\lambda}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $f'(x) = \lambda$ et donc $xf'(x) = \lambda x = f(x)$. Ainsi,

la famille de courbes $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ admet pour équation différentielle : $(ED_1) \quad y - xy' = 0$.

Q44 D'après le préambule, les trajectoires ou courbes orthogonales ont pour équation différentielle $y - x(-\frac{1}{y'}) = 0$ sur tout intervalle où y' ne s'annule pas. Soit,

les courbes orthogonales à la famille (D_λ) ont pour équation différentielle :
$(EDO_1) \quad y'y + x = 0$.

Q45 Si $\mu = 0$, $f_0(x) = \sqrt{-x}$ qui est définie sur $\{0\}$.
Si $\mu \neq 0$, $f_\mu(x)$ et défini si, et seulement si, $\mu - x^2 \geq 0$ soit encore $|x| \leq \sqrt{\mu}$. Ainsi, f_μ est définie sur $[-\sqrt{\mu},\sqrt{\mu}]$.

Si $\mu = 0$, $D_{f_\mu} = \{0\}$ et si $\mu > 0$, $D_{f_\mu} = [-\sqrt{\mu},\sqrt{\mu}]$.

Pour $\mu = 0$, la question de la dérivabilité de f_μ ne se pose pas car f_μ n'est définie qu'en un point.
Si $\mu > 0$, f_μ est la composée de $x \mapsto \mu - x^2$ qui est dérivable sur $]-\mu,\mu[$ et strictement positif et de $\sqrt{\ }$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. f_μ est donc dérivable sur $]-\mu,\mu[$.

Comme f_μ est continue sur $[-\sqrt{\mu},\sqrt{\mu}]$ et dérivable sur $]-\mu,\mu[$, f est dérivlble en μ si, et seulement si, la limite de f'_μ en μ existe dans $\mathbb{R}$. Or $f'_\mu(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{\mu-x^2}}$, $\lim\limits_{x\to\mu}\sqrt{\mu-x^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to\mu} -2x = -2\mu < 0$. Donc $\lim\limits_{x\to\mu} f'_\mu(x) = -\infty$. f_μ n'est donc pas dérivable en μ. Il en va de même en $-\mu$.

Si $\mu > 0$, f_μ est dérivable sur $]-\mu,\mu[$.

Q46 f_μ est dérivable sur $]-\mu,0[\cup]0,\mu[$ et $f_\mu(x)f'_\mu(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{\mu-x^2}}\sqrt{\mu-x^2} = -x$. Ainsi $f_\mu(x)f'_\mu(x) = -x$ et donc :

f_μ est bien solution de (EDO_0) sur $]-\mu,0[\cup]0,\mu[$ si $\mu > 0$.

Q47 Un point d'une telle trajectoire a donc pour coordonnées (x,y) avec $y = \sqrt{\mu-x^2}$ lorsqu'il est défini. Ainsi, $x^2+y^2 = x^2+\mu-x^2 = \mu$. Donc,

les trajectoires orthogonales obtenues vérifient : $x^2+y^2=\mu$.

Q48 Comme $\mu > 0$, la courbe d'équation $x^2+y^2=\mu$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\mu}$.

Partie IV

Q49 $D_\mathcal{C} = D_x \cap D_y = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

On remarque que si $t\in D_\mathcal{C}$, alors $t+2\pi \in D_\mathcal{C}$ et $x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$. Le support de $\mathcal{C}$ est entièrement décrit par le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t),y(t))$ lorsque t décrit $D_\mathcal{C}\cap I$ où I est un intervalle de longueur 2π, par exemple $I = [-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

$I\cap D_\mathcal{C} =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$. Or si $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $t+\pi\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ et on a $x(t+\pi) = -x(t)$ et $y(t+\pi) = y(t)$. Ainsi, $M(t+\pi)$ est l'image de $M(t)$ par la réflexion d'axe (Oy). L'étude de $\mathcal{C}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ suffit donc.

Si $t\in[0,\frac{\pi}{2}[$, $-t\in]-\frac{\pi}{2},0]$ et on a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Ainsi, $M(-t)$ est l'image de $M(t)$ par la réflexion d'axe (Ox). L'étude de $\mathcal{C}$ sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ suffit donc.

Donc en étudiant $\mathcal{C}$ sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et en traçant la partie de support correspondant C_1, on obtient le tracé du support correspondant aux points $M(t)$ pour t décrivant $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ grâce à la réflexion d'axe (Ox), soit C_2. On obtient le reste du support en complétant C_2 par son image dans la réflexion d'axe Oy.

$[0,\frac{\pi}{2}[$ est un domaine d'étude de $\mathcal{C}$.

Q50 $\mathcal{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition. $x'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$ qui est nul en 0, strictement positif sur $]0,\frac{\pi}{2}[$. $y'(t) = 1+\tan^2 t$ qui est strictement positif sur $[0,\frac{\pi}{2}[$. D'où le tableau de variation suivant :

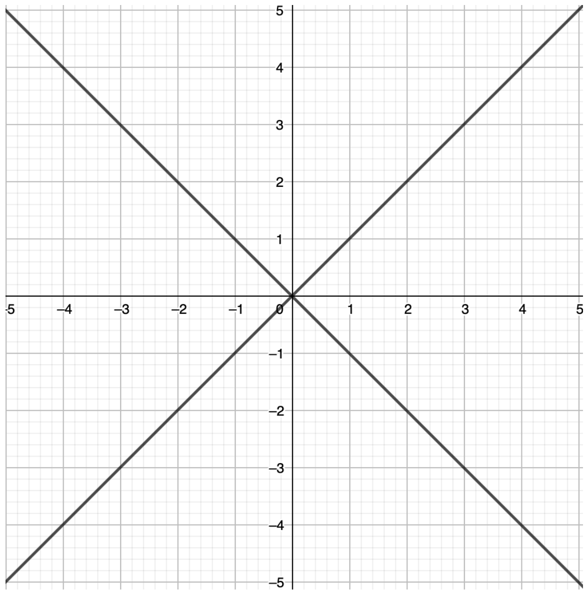
t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	$1\neq 0$	$+$	

Pour ce qui est de la limite de x en $\frac{\pi}{2}^+$, comme le cosinus tend vers 0^+, elle vaut $+\infty$.

Un vecteur de la tangente au point $M(0)$ a pour composantes $(0,1)$.

En M(0) la tangente à $\mathcal{C}$ est dirigée par $\vec{j}$.

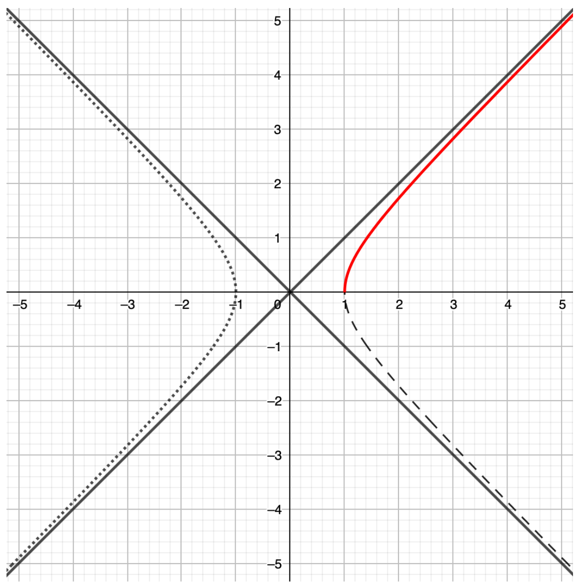
Q51 Voici la figure :



Un vecteur normal à D (resp. D'), qui a pour équation $x - y = 0$ (resp. $x + y = 0$) a pour composantes : $(1, -1)$ (resp. $(1, 1)$). Ces deux vecteurs étant orthogonaux, on déduit :

$$D \text{ et } D' \text{ sont orthogonales.}$$

Q53 On peut rapidement étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D quand t décrit $[0, \frac{\pi}{2}[$ en évaluant le signe de $\delta = y - x$. $\delta = \frac{\sin t - 1}{\cos t}$ qui est du signe contraire de $\cos t$, donc négatif pour t dans $[0, \frac{\pi}{2}[$. $\mathcal{C}$ est donc sous la droite D quand t décrit cet intervalle. On complète ensuite le tracé en utilisant les deux réflexions identifiées précédemment. D'où la représentation graphique (en trait continu, le segment de support correspondant au tableau de variation) :



Q54 $\mathcal{C}$ vérifie $(EC2)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t + \lambda \tan t = 1$ pour tout t de $D_{\mathcal{C}}$, soit $\frac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t} + \lambda \tan t = 1$, soit encore $\lambda \tan t = 0$, soit enfin $\lambda = 0$.

$$\mathcal{C} \text{ vérifie } (EC2) \text{ si, et seulement si, } \lambda = 0.$$

Q55 On suppose que y est une fonction de x de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'on dérive $(EC2)$ par rapport à x. On trouve : $2x-2yy'+\lambda y'=0$. En multipliant cette égalité par y, on obtient : $2xy-2y^2y'+\lambda yy'=0$. Or $\lambda y = 1-x^2+y^2$. En substituant dans l'équation précédente, on trouve : $2xy-2y^2y'+(1-x^2+y^2)y'=0$ et après simplification $2xy+(1-x^2-y^2)y'=0$.

La famille $(H_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ admet bien (ED) pour équation différentielle.

Q56 Si l'on suppose que y' ne s'annule pas sur l'intervalle considéré, en substituant $-\frac{1}{y'}$ à y', on obtient : $2xy+(1-x^2-y^2)(-\frac{1}{y'})=0$ soit que,

les courbes orthogonales à la famille $(H_\lambda)_{\lambda in\mathbb{R}}$ ont pour équation différentielle :

$$2xyy'-(1+x^2+y^2)=0.$$

Q57 Comme y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $z=y^2$ l'est également et $z'=yy'$. Donc :

z vérifie l'équation $xz'+z-1+x^2=0$.

Q58 Remarquons d'abord que si z est une fonction polynomiale de degré k, xz' en est une autre du même degré, qui est également celui de $z+xz'$, expression qui ne peut faire disparaître les termes de plus haut degré. Nécessairement, pour que x^2 disparaisse dans l'équation, z doit être de degré 2. Remarquons également que en remplaçant x par 0 dans l'équation, on obtient $z(0)=1$. Posons donc $z(x)=ax^2+bx+1$. Cette fonction polynômiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle vérifie (E_1) si, et seulement si : $x(2ax+b)+ax^2+bx+1-1+x^2=0$. Il suffit donc que : $\left\{\begin{array}{c} 3a+1=0 \\ 2b=0 \end{array}\right.$. Donc,

une solution particulière de (E_1) est $z : x\mapsto -\frac{1}{3}x^2+1$.

Q59 On résout $(EC1)$ dans un intervalle I qui ne contient pas 0. L'équation homogène associée à $(EC1)$ équivaut à : $z'+\frac{1}{x}z=0$, qui a pour solutions sur I les fonctions $z : x\mapsto A\exp(-\ln|x|)$ où $A\in\mathbb{R}$. On a encore $z(x)=\frac{A}{|x|}$ et comme A décrit $\mathbb{R}$ et que x garde un signe constant sur I, les solutions de cette équation homogène sont les $z : x\mapsto \frac{A}{x}$, $A\in\mathbb{R}$. Donc,

les solutions de $(EC1)$ sur tout intervalle où z ne s'annule pas sont les $z : x\mapsto \frac{A}{x}-\frac{1}{3}x^2+1$ où A décrit $\mathbb{R}$.

Q60 Attendu que $z=y^2$, on a $x(x^2+3y^2-3)=x(x^2+3(-\frac{1}{3}x^2+1+\frac{A}{x}-3)=3A$. Donc,

les courbes orthogonales $(\mathcal{C}_\mu)_\mu\in\mathbb{R}$ à la famille $(H_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifient bien l'équation :

$$x(x^2+3y^2-3)-3\mu=0.$$