CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Chaque problème est constitué de parties indépendantes.

PROBLÈME 1

Application sur $\mathbb{R}_n[X]$, $\Phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$

Le but de cet exercice est l'étude de l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec n un entier fixé non nul par :

$$\Phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

afin de permettre le calcul de somme d'entiers.
On note pour tout k entier non nul Φ^k la composée k -ième de l'application Φ.

Partie I - Préliminaires

Q1. Donner la formule du binôme de Newton.

Q2. Soit k un entier non nul. Montrer que :

$$(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i.$$

Q3. On considère les polynômes $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = X^3$.
Montrer que :

$$\Phi(P_0)(X) = 0,$$

$$\Phi(P_1)(X) = 1,$$

$$\Phi(P_2)(X) = 2X + 1,$$

$$\Phi(P_3)(X) = 3X^2 + 3X + 1.$$

Q4. Calculer $\Phi^2(P_2)(X)$ et $\Phi^3(P_2)(X)$.

Q5. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. Montrer que pour tout polynôme non constant P de degré k avec k un entier non nul, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$.

Q7. Calculer le noyau de Φ.

Q8. Donner l'image de Φ.

Q9. Soient P et Q, deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, tels que $\Phi(Q) = P$.
Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0).$$

Partie II - Une famille de polynômes

Q10. Considérons la famille $(H_i)_{i\in[0,n]}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ où pour chaque i non nul,

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(X-k)}{i!}$$

et $H_0 = P_0$ le polynôme constant égal à 1.

Prouver que $(H_i)_{i\in[0,n]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$:

Q11. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $H_i(0) = 0$.

Q12. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi(H_i) = H_{i-1}$.

Q13. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi^i(H_i) = 1$.

Q14. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X)$ avec a_k réel pour tout k entier entre 0 et n. Montrer que $P(0) = a_0$ et que pour l, un entier fixé entre 1 et n, $a_l = \Phi^l(P)(0)$.

Q15. En déduire que tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire (de manière unique) sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k(P)(0)H_k(X)\,.$$

Q16. Vérifier que $X = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X)$.

Q17. Déduire à l'aide de **Q9**, de **Q12** et de **Q16** que :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Q18. Vérifier que $X^2 = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) + 2 \times H_2(X)$.

Q19. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Q20. Proposer en **Python** une fonction qui renvoie la valeur de la somme des cubes des n premiers entiers prenant en argument un entier naturel n passé en paramètre.

PROBLÈME 2

Trajectoires orthogonales

Le problème ne nécessite aucune connaissance sur les courbes orthogonales.

Soient (S) un plan et $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de courbes tracées sur (S), Λ étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle **trajectoire orthogonale** de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sur (S), toute courbe C, tracée sur (S) et coupant orthogonalement chacune des Γ_λ $(\lambda \in \Lambda)$.

On se place dans la situation suivante.
Soit $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de courbes du plan. Chaque courbe Γ_λ est la courbe représentative d'une fonction y d'une variable réelle x de classe C^1 qui vérifie une équation différentielle :

$$(ED) \qquad f(x, y, y') = 0$$

appelée équation différentielle du premier ordre de la famille de courbes $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

On admet qu'une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est :

$$(EDO) \qquad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0\,.$$

On remplace donc y' par $\dfrac{-1}{y'}$ dans (ED). On caractérisera les courbes orthogonales à la famille $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ par les solutions de l'équation (EDO).

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et du repère orthonormé usuel $(O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est la base orthonormée directe usuelle $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Nous allons montrer sur un exemple qu'il est possible de se ramener au plan (xOy) d'équation $z = 0$.

On considère le plan (S) d'équation :

$$(E) : \qquad x + y + z = 0\,.$$

Partie I - Quelques calculs dans le plan S

Q21. Montrer que l'origine O et les points M, N de coordonnées respectives $(1, 0, -1)$ et $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ appartiennent au plan (S).

Q22. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ forment une base du plan (S).

Q23. Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$.

Q24. Donner une interprétation géométrique de la norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$.

Q25. Montrer que le point A de coordonnées $(0, 1, 1)$ n'appartient pas au plan (S).

Q26. Calculer le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OA}$.

Q27. Donner une interprétation géométrique du produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OA}$.

Q28. Donner un vecteur normal au plan (S).

Q29. Donner les coordonnées du projeté orthogonal A' de A sur le plan (S). On pourra réaliser un schéma pour expliciter la démarche utilisée.

Q30. Calculer la distance du point A au plan (S).

Partie II - Changement de repère

On souhaite effectuer un changement de base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de telle sorte qu'une équation du plan (S) soit définie $z = 0$ dans l'espace affine muni de la nouvelle base orthonormée directe.

On considère la famille $\mathcal{B}'$ formée par les vecteurs :
$\overrightarrow{u_x}$ de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{u_y}$ de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ et $\overrightarrow{u_z}$ de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Q31. Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q32. Montrer que la base $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale.

Q33. Montrer que la base $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale directe.

Q34. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

Q35. Justifier que la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$ est :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Q36. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$ a pour coordonnées $\left(0, 0, \sqrt{3}\right)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Q37. Justifier que l'équation du plan (S) dans le repère $(O, \mathcal{B}')$ est $z = 0$.

Q38. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère $(O, \mathcal{B}')$, donner la matrice R de la projection orthogonale sur le plan (S) dans la base $\mathcal{B}'$.

Q39. Donner la relation permettant d'obtenir la matrice Q de la projection orthogonale sur le plan (S) dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de R, $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. On admet que l'on obtient après calculs :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Q40. Justifier que Q est diagonalisable. Sans calcul et à l'aide des questions précédentes, justifier que les valeurs propres sont 0 et 1.

Q41. Montrer que l'espace propre associé à la valeur 1 est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$. On rappelle que les points M et N sont définis à **Q21**.

On admet que le travail effectué dans cette partie peut être aussi réalisé pour un plan quelconque. Dans la suite de tout le problème, le plan (S) aura pour équation $z = 0$.

Partie III - Soit $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ la famille des droites du plan $(S) : z = 0$ passant par l'origine. Détermination des trajectoires orthogonales de la famille de droites $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$

L'espace est rapporté à son repère habituel. On considère le plan (S) d'équation $z = 0$. Il est possible, en toute généralité, de se placer dans le cas où (S) est le plan d'équation $z = 0$ dans la base usuelle de $\mathbb{R}^3$.

Q42. Déterminer l'équation dans le plan $(S) : z = 0$ de la droite D_λ passant par l'origine O et par le point M_λ de coordonnées $(1, \lambda, 0)$ avec λ réel. Faire un dessin mettant en jeu D_λ, O et M_λ pour expliquer la situation.

Q43. En déduire que la famille de courbes $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ admet pour équation différentielle du premier ordre :

$$(ED_1) \qquad y - xy' = 0\,.$$

Q44. En utilisant le résultat admis énoncé au début du problème 2, démontrer que les courbes orthogonales ont pour équation différentielle :

$$(EDO_1) \qquad y'y + x = 0\,.$$

Q45. Soit μ un réel positif. Donner les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction :

$$f_\mu : x \mapsto \sqrt{\mu - x^2}\,.$$

Q46. Montrer que la fonction f_μ est solution de (EDO_1) sur $]-\sqrt{\mu}; 0[\cup]0; \sqrt{\mu}[$.

Q47. Montrer que les trajectoires orthogonales obtenues vérifient l'équation :

$$(EC_1) \qquad x^2 + y^2 = \mu \quad \text{avec } \mu \text{ un réel positif non nul.}$$

Q48. Donner la nature géométrique des courbes avec leurs éléments caractéristiques vérifiant l'équation (EC_1).

Partie IV - Détermination des trajectoires orthogonales de la famille des hyperboles équilatères $(H_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ du plan (S)

On considère la courbe paramétrée C d'équation :

$$\begin{cases} x(t) = & \dfrac{1}{\cos(t)} \\ y(t) = & \tan(t) \end{cases}.$$

Q49. Proposer un ensemble d'étude de la courbe paramétrée C en justifiant votre démarche.

Q50. Étudier la courbe paramétrée C sur l'ensemble $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. On indiquera en justifiant les tangentes parallèles aux axes le cas échéant.

Q51. Tracer sur votre copie dans un repère orthonormé d'unité 1 cm les droites d'équation $D : y = x$ et $D' : y = -x$.
On admet que ce sont les asymptotes à la courbe.

Q52. Montrer que D et D' sont orthogonales.

Q53. Tracer la courbe C sur le graphique précédent réalisé à la **Q51**.

Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes forment un angle droit. L'équation caractéristique des hyperboles équilatères dont la famille est notée $(H_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est :

$$(EC_2) \qquad x^2 - y^2 + \lambda y = 1\,.$$

Q54. Trouver la valeur de λ pour que C vérifie l'équation (EC_2).

Q55. Démontrer que famille $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ admet pour équation différentielle :

$$(ED_2) \qquad 2xy + (1 - x^2 - y^2)y' = 0\,.$$

Q56. En utilisant le résultat admis énoncé au début du problème et rappelé ici :

Une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *est :*

$$(EDO) \qquad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0\,.$$

Démontrer que les courbes orthogonales à la famille (H_λ) ont pour équation différentielle :

$$(EDO_2) \qquad 2xyy' - 1 + x^2 + y^2 = 0 \text{ avec } y' \neq 0\,.$$

Q57. En prenant la fonction $z = y^2$, justifier que z est de classe C^1, montrer que l'équation (EDO_2) peut s'écrire sous la forme :

$$(E_1) \qquad xz' + z - 1 + x^2 = 0\,.$$

Q58. Trouver une solution particulière de (E_1) sous forme polynomiale.

Q59. Résoudre (E_1).

Q60. Déduire que les courbes orthogonales $(C_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$ à la famille (H_λ) vérifient l'équation :

$$x(x^2 + 3y^2 - 3) - 3\mu = 0\,.$$

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1182 – D'après documents fournis