Corrigé CCINP 2023
Maths - TSI

Problème I

Partie I

Q 1 On calcule

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(xI_3 - A)\\
&= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1\\ 0 & x-1 & -1\\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1\\ 0 & x-1 & -1\\ 1 & x-2 & x-2 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\
&= (x-2)^2 x + (x-2) \quad \text{dev /t à } C_1\\
&= (x-2)(x-1)^2
\end{aligned}$$

Les racines du polynôme caractéristique étant les valeurs propres de A, on en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

Q 2 La matrice A est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé.

Q 3 La matrice A est inversible car $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Q 4 La matrice A n'est pas diagonalisable car $\mathrm{E}_1(A) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$ donc la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 n'est pas égale à la multiplicité de 1 dans le polynôme caractéristique.

Partie II

Q 5 Il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = 0$, alors

$$\begin{cases} \mu &= 0\\ \lambda + \mu &= 0\\ \lambda + \nu &= 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

donc la famille est libre et puisque $\mathrm{card}((b_1, b_2, b_3)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Q 6 On calcule

$$\begin{cases} f(b_1) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2b_1 \\ f(b_2) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_2 \\ f(b_3) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_2 + b_3 \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

Q 7 Il suffit d'écrire avec $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule alors

$$P \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q 8 A l'aide des formules de changement de bases, on peut écrire la relation

$$A = PTP^{-1}$$

Partie III

Q 9 Il suffit de poser $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour avoir la relation $T = D + N$, et alors

$$D \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N \times D$$

donc les matrices D et N commutent.

Q 10 On calcule $N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $N^n = N^2 \times N^{n-2} = 0_3$, la matrice nulle de taille 3.

Q 11 Puisque N et D commutent, la formule du binôme s'applique et sera tronquée dès que $n \geq 2$ car $N^k = 0_3$ pour $k \geq 2$.

On obtient pour $n \geq 2$,

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette formule est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Q 12 On peut écrire

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n + w_n \\ v_n + w_n \\ -u_n + v_n + w_n \end{pmatrix} = AX_n$$

Q 13 On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. **La démonstration par récurrence n'est plus exigible d'après le nouveau programme.**

Q 14 Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = PT^nP^{-1}$.

Initialisation : $n = 0$

On a $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$.

On calcule

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nP^{-1} \times A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} \quad \text{d'après Q8.} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par principe de récurrence, on a bien $A^n = PT^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 15 On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = A^n X_0 = PT^nP^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec

$$PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & -n & n \\ n+1-2^n & 2^n - n & n \\ 1-2^n & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_n &= n+1 \\ v_n &= n+1-2^n \\ w_n &= 1-2^n \end{cases}$$

Problème II

Partie I

Q 16 La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est continue sur $]0;1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, on peut écrire pour tout $t \in]0;1]$, $t^\alpha = \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$ or d'après les propriétés des intégrales de Riemann

$$\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}}\mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow -\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$$

et dans ce cas-là, on a $\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \left[\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

Q 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $1+t \underset{0^+}{\sim} 1$, d'où

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0^+}{\sim} t^{x-1}.$$

Q 18 La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0;1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, d'après la question précédente, on a au voisinage de 0

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0^+}{\sim} t^{x-1}$$

Ces fonctions sont positives sur $]0;1]$, donc par le théorème de comparaison, les intégrales $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Or, d'après Q1. $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x-1 > -1$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow x > 0.$$

Partie II

Q 19 On calcule

$$f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$

De même, on calcule

$$f(2) = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [t - \ln(1+t)]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

Q 20 On peut écrire pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$

On applique alors cette relation avec $a = 1$ et $b = -1$

$$1 - (-t)^n = 1^n - (-1)^n = (1-(-t))\sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-1-k}(-t)^k = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$$

Q 21 Pour tout $n \geq 2$, on reprend la relation précédente au rang $n-1$, pour tout $t \in [0;1]$

$$1-(-t)^{n-1} = (1+t)\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k$$

on divise alors par $(1+t)$ et on isole $\dfrac{(-t)^{n-1}}{1+t}$ pour obtenir la relation

$$\frac{(-t)^{n-1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k$$

d'où

$$\frac{t^{n-1}}{1+t} = \frac{(-1)^{n-1}}{1+t} + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k$$

On peut alors intégrer entre 0 et 1 pour obtenir

$$\begin{aligned}
f(n) &= \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}}{1+t} + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}\int_0^1 (-1)^k t^k \mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat demandé.

Q 22 On propose la fonction suivante

[language=python] from numpy import log

def fEntier(n): S=(-1)**(n-1)*log(2) for k in range(n-1): S=S+(-1)**(n+k)/(k+1) return S

Partie III

Q23 Voir le cours de votre professeur.

Q24 On a $-1 < \alpha \leq \beta$. Comme t est dans $]0,1]$, $\ln t \leq 0$ et donc $\alpha \ln t \geq \beta \ln t$. Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\exp(\alpha \ln t) \geq \exp(\beta \ln t)$ et donc $t^\alpha \geq t^\beta$.

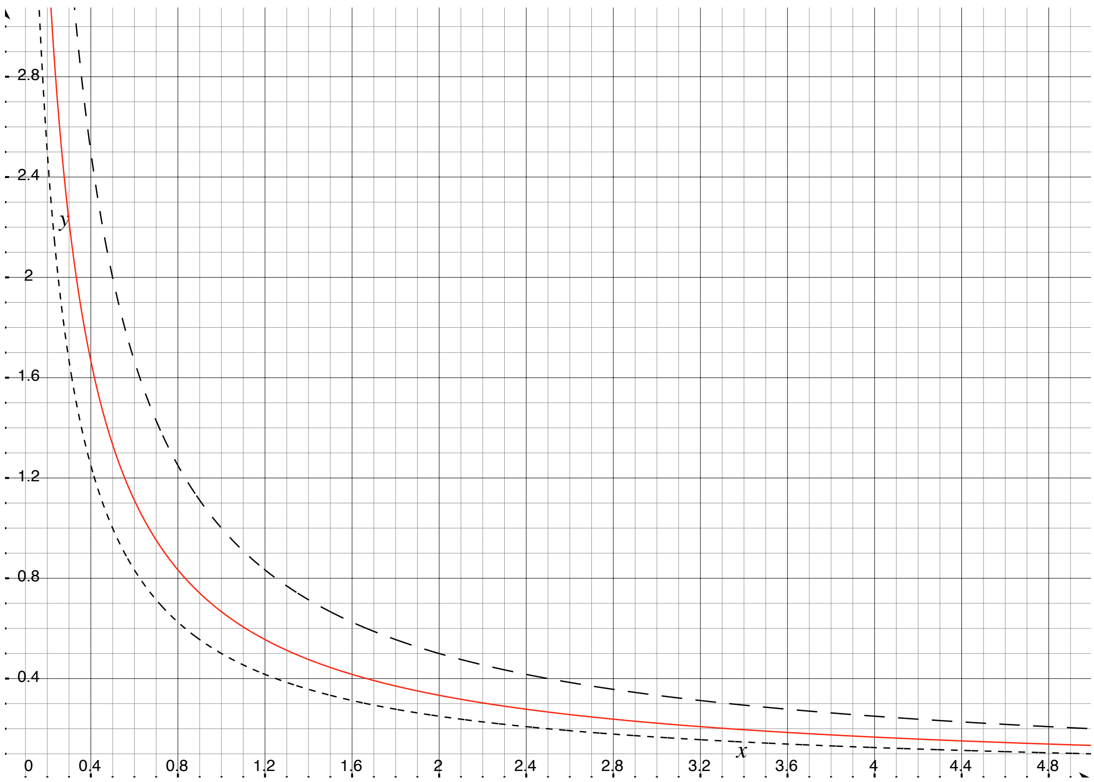
Ainsi, pour tout t de $]0,1]$, $t^\alpha \geq t^\beta$. Comme $t \geq 0$, $1+t > 0$ et donc $\dfrac{1}{1+t} > 0$. Ainsi $\dfrac{t^\alpha}{1+t} \geq \dfrac{t^\beta}{1+t}$. Comme les deux intégrales $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ convergent et que $0 < 1$, c'est à dire que les bornes sont dans l'ordre croissant, d'après la croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t} \geq \int_0^1 \frac{t^\beta}{1+t}$, soit $f(\alpha) \geq f(\beta)$. f est donc décroissante sur $]1,+\infty[$.

Q25 Soit $x > 0$ et $t \in]0,1]$. $0 < t \leq 1$, donc $1 < 1+t \leq 2$ donc, comme toutes ces quantités sont strictement positives, $\dfrac{1}{1} > \dfrac{1}{1+t} \geq \dfrac{1}{2}$. Or $t^{x-1} > 0$, donc $\dfrac{t^{x-1}}{2} \leq \dfrac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1}$ (N.B. Une inégalité stricte entraîne l'inégalité large correspondante).

A partir de l'inégalité précédente, les fonctions en jeu ayant des intégrales convergentes entre 0 et 1 d'après ce qui précède et comme $0 < 1$, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2}dt \leq \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^{x-1}dt$. Comme $x > 0$, une primitive de $x \mapsto t^{x-1}$ sur $]0,1]$ est $x \mapsto \dfrac{t^x}{x}$, que $\displaystyle\lim_{t\to1} t^x = 1$ et que $\displaystyle\lim_{t\to0} t^x = 0$ vu que $x > 0$, on obtient après intégration : $\dfrac{1}{2x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

Q26 On utilise le théorème limite et encadrement. Comme $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{x} = +\infty$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Q27 En pointillés courts : courbe d'équation $y = 1/2x$. En pointillés longs : courbe d'équation $y = 1/x$. En rouge l'allure de la courbe de f.



Partie IV

Q28 Si $x > 0$, $x+1 > 0$, donc les intégrales $f(x)$ et $f(x+1)$ convergent. La linéarité de l'intégrale s'applique :

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} + \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t)}{1+t}dt = \int_0^1 t^{x-1}dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}.$$

Q29 Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, $f(x-1) \geq f(x) \geq f(x+1)$.

Ainsi, $f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$.

Q30 D'après la question 28 (appliquée avec x, puis avec $x-1$), pour x voisin de $+\infty$ donc strictement supérieur à 1, $\dfrac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$. Donc : $\dfrac{1}{2x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2(x-1)}$. Comme $x > 0$, on obtient l'encadrement : $1 \leq \dfrac{f(x)}{2x} \leq \dfrac{1/2(x-1)}{1/2x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/2(x-1)}{1/2x} = 1$, d'après le théorème limite et encadrement, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/2x = 1$. Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Problème 3

Partie I

Q31 Voir le cours de votre professeur.

Q32 L D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, comme le rayon de convergence de la série $\sum x^n$ étant 1, celui de sa série dérivée est également 1, et la somme de la série dérivée sera la dérivée de sa somme. Ainsi, pour tout x de $]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Q33 Voir le cours de votre professeur.

Partie II

Q34 On remarque que la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, car X est le rang d'apparition du premier succès lors d'une infinité i.i.d. d'épreuve de Bernoulli "obtenir un pile" de probabilité p. C'est-à-dire que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P(X=n) = (1-p)^{n-1}p$.

Q35 Il s'agit d'étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} nP(X=n) = \sum\limits_{n\geq 1} n(1-p)^{n-1}p$. Or $p \in]0,1[$, donc $1-p \in]0,1[$ et d'après la question 32, la série $\sum\limits_{n\geq 1} n(1-p)^{n-1}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{(1-(1-p))^2} = \dfrac{1}{p^2}$. Ainsi X est d'espérance finie et on a, par linéarité (en multipliant le résultat précédent par p) : $E(X) = p\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = \dfrac{1}{p}$.

Partie III

Q36 On a $N\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Q37 Lorsque $X=n$, il y a n boules dans l'urne numérotées de 1 à n. On ne peut pas tirer de boule dont le numéro est strictement supérieur à n. Donc, si $k > n$, $P_{[X=n]}(N=k) = 0$. Si $1 \leq k \leq n$, il y a n possibilités si l'on tire une boule dans l'urne qui en contient n, et une seule possibilité de tirer la boule numérotée k. Les tirages étant équiprobables, $P_{[X=n]}(N=k) = \dfrac{1}{n}$.

Q38 La famille $(X=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, car il sont deux à deux incompatibles, de probabilité non nulle et que leur réunion est Ω. On applique la formule des probabilités totales à l'événement $(N=k)$ et on obtient : $P(N=k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P_{[X=n]}(N=k)P(X=n)$. Or la probabilité conditionnelle est nulle si $n < k$, et en éliminant les termes nuls de la somme précédente, on trouve : $P(N=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} P_{[X=n]}(N=k)P(X=n)$, soit encore :

$$P(N=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p$$

Q39 $P(N=1)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p$ et par linéarité pour les séries convergentes :

$P(N=1)=\dfrac{p}{1-p}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n}$ qui vaut, d'après la question 33,

$\dfrac{p}{1-p}(-\ln(1-(1-p))$ soit encore $\dfrac{p}{1-p}(-\ln(p))$.

Ainsi : $P(N=1)=-\dfrac{p}{1-p}\ln p$.

Partie IV

Q40 Voir le cours de votre professeur.

Q41 On a vu dans la question 38 que $P(N=k)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p$. La série étant à termes strictement positifs, la somme totale est strictement plus grande que son premier terme $\dfrac{1}{k}(1-p)^{k-1}p$, qui est clairement strictement positif.

Q42 Par définition de la probabilité conditionnelle, $P((X=1)\cap(N=2))=P_{[X=1]}(N=2)P(X=1)=0$ d'après la question 37. Or $P(X=1)$ et $P(N=2)$ ne sont pas nuls, et donc ; $P((X=1)\cap(N=2))\neq P(X=1)\times P(N=2)$.

N et X ne sont donc pas indépendantes.

Partie V

Q43 Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Comme n est dans $\mathbb{N}^*$, $1/n\leq 1$ et donc $0\leq\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p\leq(1-p)^{n-1}p$.

Or les séries $\sum\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p$ et $\sum(1-p)^{n-1}p$ convergent, donc d'après le théorème de comparaison pour les séries, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p\leq\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^{n-1}p$. Or, par linéarité, la deuxième somme vaut

$$p(1-p)^{k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^{n-k}=p(1-p)^{k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^{n-k}=p(1-p)^{k-1}\frac{1}{(1-(1-p))}=(1-p)^{k-1}.$$

Donc : $P(N=k)\leq(1-p)^{k-1}$

Q44 Il faut étudier la convergence de la série $\sum kP(X=k)$ soit celle de $\displaystyle\sum k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p$. Or d'après ce qui précède, $P(N=k)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p\leq(1-p)^{k-1}$ donc $kP(N=k)\leq k(1-p)^{k-1}$.

Or d'après la question 32, la série $\sum k(1-p)^{k-1}$ converge et comme les termes $kP(N=k)$ et $k(1-p)^{k-1}$ sont positifs, la série $\sum kP(N=k)$ converge et N admet une espérance, et $E(N)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{k}{n}(1-p)^{n-1}p$

Q45 D'après la propriété admise dans l'énoncé :

$E(N)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}(1-p)^{n-1}p=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p\sum_{k=1}^{n}k$. par distributivité de$\times$ par rapport à $+$.

Or la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$, ainsi :

$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p\frac{n(n+1)}{2} = \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(1-p)^{n-1} = \frac{p}{2(1-p)}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(1-p)^n =$
$\frac{p}{2(1-p)}[\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(1-p)^n - 1]$ (on a ajouté 1 à la série pour que la somme parte de $n = 0$ et on a retranché 1 à cette somme). D'après la question 32, la somme qui est dans le crochet vaut $\frac{1}{(1-(1-p))^2} = 1/p^2$. Ainsi :

$E(N) = \frac{p}{2(1-p)}[\frac{1}{p^2} - 1] = \frac{p}{2(1-p)}\frac{1-p^2}{p^2}$ et donc $E(N) = \frac{(1+p)}{2p}$ ou encore $E(N) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{p})$.

Q 46 $E(N) - E(X) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{p}) - \frac{1}{p} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p})$ Or $1/p > 1$ donc la différence est négative. Ainsi : $E(N) \leq E(X)$.

G. Meyer : Personnellement, je ne sais pas dire si c'était prévisible !

Mohamed Bouljihad : oui c'est bien prévisible car N est forcément plus petit que X (c'est la question 37) donc en moyenne N est plus petit que X. D'ailleurs, on pourrait faire cette question en passant par le fait que $N \leq X$.