EXERCICE

Q1. Par définition, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles admet une limite finie.

Q2. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann; elle converge pour $\boxed{\alpha > 1}$.

Q3. On pose, pour tout x réel, $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$; f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

On a donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
De plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; on peut dresser le tableau de variations ci-contre :
D'après le tableau de variations, $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x}$$

Q4. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$, d'après ce qui précède, $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \geqslant 1 + \frac{1}{k}$; par produit d'inégalités, il vient : $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

d'après les propriétés de l'exponentielle, on a donc : $\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$; soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{e}^{H_n} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

Comme $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, alors le produit $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ est un produit télescopique et

$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n + 1$; ce qui donne : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{H_n} \geqslant n + 1}$

Q5. $\lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{H_n} = +\infty}$

Or $H_n = \ln\left(\mathrm{e}^{H_n}\right)$, donc par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

La suite des sommes partielles $(H_n)_{n\geqslant 1}$ n'admet pas de limite finie donc $\boxed{\text{la série harmonique diverge}}$

Q6. La variable X_k vaut 1 si le $k-$ième tirage amène la boule noire et 0 sinon; donc

$$\boxed{\text{La variable } Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ représente le nombre de tirages ayant amené la boule noire}}$$

Q7. D'après le protocole, quel que soit le tirage, l'urne contient une seule boule noire et le nombre de boules blanches augmente de 1 unité après chaque tirage; donc pour $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{k}$ et $\mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{k-1}{k}$

La variable X_k suit donc $\boxed{\text{une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{k} \text{ et d'espérance } \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{k}}$

Q8. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; on a bien $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = H_n}$

Q9. $\mathbb{E}(Z_n)$ représente le nombre moyen de tirages qui amènent la boule noire; on cherche donc à résoudre $\mathbb{E}(Z_n) \geqslant 4$. On sait que $\mathbb{E}(Z_n) = H_n$; donc $\mathbb{E}(Z_n) \geqslant 4 \Leftrightarrow H_n \geqslant 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{H_n} \geqslant \mathrm{e}^4$.

D'après la **Q4**, on a $\mathrm{e}^{H_n} \geqslant n + 1$; par transitivité, il suffit de résoudre $n + 1 \geqslant \mathrm{e}^4 \Leftrightarrow n \geqslant \mathrm{e}^4 - 1$

On donne $\mathrm{e}^4 \in]54, 55[$; donc le nombre n recherché est $\boxed{n = 54}$.

PROBLÈME 1

Partie I

Q10. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est bien une matrice tridiagonale ; de plus $a_1 = -1$ et $b_1 = 1$ donc $a_1 b_1 = -1$; de même, $a_2 = -1$ et $b_2 = 1$, donc $a_2 b_2 = -1$ et M_3 vérifie bien les données de l'énoncé.

Q11. $\operatorname{rg}\big(M_3 - I_3\big) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; donc $\boxed{\operatorname{rg}\big(M_3 - I_3\big) = 2}$

D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim\big(\operatorname{Ker}(M_3 - I_3)\big) = 1$; donc il existe un vecteur non nul $U \in \operatorname{Ker}(M_3 - I_3)$; c'est-à-dire qu'il existe un vecteur non nul U tel que $M_3 U = U$ et donc que

$$\boxed{M_3 \text{ admet la valeur 1 comme valeur propre réelle.}}$$

Q12. $\chi_{M_3}(X) = \det(XI_3 - M_3) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ X-1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\big((X-1)^2 + 2\big) \text{ ; donc } \boxed{\chi_{M_3}(X) = (X-1)(X^2 - 2X + 3)}$$

Le discriminant du polynôme $X^2 - 2X + 3$ vaut -8, donc $\boxed{\chi_{M_3}(X) \text{ n'est pas scindé sur } \mathbb{R}}$

Q13. $\chi_{M_3}(0) = \det(-M_3) = (-1)^3 \det(M_3) = -\det(M_3)$; donc $\boxed{\det(M_3) = 3}$

Q14. Le polynôme $X^2 - 2X + 3$ possède deux racines complexes conjuguées (donc distinctes).

Les valeurs propres de M_3 étant les racines de $\chi_{M_3}(X)$, on peut dire que M_3 possède trois valeurs propres complexes distinctes, dont une réelle (la valeur 1) et les deux autres conjuguées. (On peut montrer que ces dernières valeurs sont $1 \pm i\sqrt{2}$).

Le polynôme caractéristique de M_3 est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ ce qui prouve que

$$\boxed{M_3 \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3, donc

$$\boxed{\text{chaque sous-espace propre est de dimension 1}}$$

Q15. On reprend le calcul effectué en **Q11** : $E_\lambda = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; donc $\boxed{E_\lambda = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

Q16. $M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p + i\sqrt{2} & = & p + ip\sqrt{2} \\ -p + i\sqrt{2} - p & = & i\sqrt{2} - 2 \\ -i\sqrt{2} - p & = & -p - ip\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{p = 1}$ On en déduit que la valeur $1 + i\sqrt{2}$ est valeur propre associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{E_\mu = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

Q17. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ un vecteur propre de $N=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ associé à la valeur propre z, alors $NX=zX$; soit

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=zx_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=zx_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=zx_3\end{array}\right.$$

par les propriétés de la conjugaison, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{a_{11}}\,\overline{x_1}+\overline{a_{12}}\,\overline{x_2}+\overline{a_{13}}\,\overline{x_3}=\overline{z}\,\overline{x_1}\\\overline{a_{21}}\,\overline{x_1}+\overline{a_{22}}\,\overline{x_2}+\overline{a_{23}}\,\overline{x_3}=\overline{z}\,\overline{x_2}\\\overline{a_{31}}\,\overline{x_1}+\overline{a_{32}}\,\overline{x_2}+\overline{a_{33}}\,\overline{x_3}=\overline{z}\,\overline{x_3}\end{array}\right.$$

or N est une matrice à cœfficients réels, donc on a :

$$\left\{\begin{array}{l}a_{11}\,\overline{x_1}+a_{12}\,\overline{x_2}+a_{13}\,\overline{x_3}=\overline{z}\,\overline{x_1}\\a_{21}\,\overline{x_1}+a_{22}\,\overline{x_2}+a_{23}\,\overline{x_3}=\overline{z}\,\overline{x_2}\\a_{31}\,\overline{x_1}+a_{32}\,\overline{x_2}+a_{33}\,\overline{x_3}=\overline{z}\,\overline{x_3}\end{array}\right.$$

Donc on a $N\overline{X}=\overline{z}\overline{X}$; ce qui montre bien que $\overline{X}$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre $\overline{z}$.

On peut donc en déduire : $\boxed{E_{\overline{\mu}}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-i\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}\right)}$

Partie II

Q18. $\chi_{M_2}(X)=\begin{vmatrix}X-1&-b_1\\-a_1&X-1\end{vmatrix}=(X-1)^2-a_1b_1=(X-1)^2+1=\boxed{(X-1-i)(X-1+i)}$

Q19. a_1 et b_1 étant des réels vérifiant $a_1b_1=-1$, le calcul précédent montre que $\chi_{M_2}(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc que $\boxed{M_2 \text{ est ni diagonalisable, ni trigonalisable sur } \mathbb{R}.}$

Q20. Le polynôme caractéristique de M_2 est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc $\boxed{M_2 \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

Q21. $\chi_{M_2}(0)=\det(-M_2)=(-1)^2\det(M_2)$; donc $\boxed{\det(M_2)=2}$

Partie III

Q22. Montrons par récurrence double que $\forall n\in\mathbb{N}$, F_n est un entier naturel.

- *Initialisation :* $F_0=1$ et $F_1=1$, donc la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$.
- *Hérédité :* On suppose que la propriété est vérifiée par F_n et F_{n+1}.
  Par définition, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, donc, par hypothèse de récurrence, F_{n+2} est la somme de deux entiers naturels ; ainsi F_{n+2} est bien un entier naturel ; ce qui établit l'hérédité.
- *Conclusion :* On a montré par récurrence que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ F_n \text{ est un entier naturel.}}$

Q23. L'équation caractéristique associée à $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est $r^2-r-1=0$, dont le discriminant vaut 5 et les racines sont $r_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$ et $r_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$; par théorème, il existe deux réels λ et μ tels que

$$F_n=\lambda\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

F_0 et F_1 donnent : $\left\{\begin{array}{c}\lambda+\mu=1\\\frac{1+\sqrt5}{2}\lambda+\frac{1-\sqrt5}{2}\mu=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda+\mu=1\\(1+\sqrt5)\lambda+(1-\sqrt5)\mu=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda+\mu=1\\\sqrt5\lambda-\sqrt5\mu=1\end{array}\right.$

On obtient : $\lambda=\dfrac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}=\dfrac{5+\sqrt5}{10}$ et $\mu=\dfrac{-\sqrt5+1}{-2\sqrt5}=\dfrac{5-\sqrt5}{10}$; donc :

$$\boxed{F_n=\frac{5+\sqrt5}{10}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\frac{5-\sqrt5}{10}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}$$

Q24. a)

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & & \text{Fibo}(4) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & & \text{Fibo}(3) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \text{Fibo}(2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \text{Fibo}(2) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \text{Fibo}(1) & & \text{Fibo}(1) & & \text{Fibo}(0) \\
\text{Fibo}(1) & & \text{Fibo}(0) & & & & &
\end{tikzcd}$$

b) Si on note F_n le nombre d'appels récursifs de Fibo(n), alors on a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et la **Q23** montre que la complexité de cette fonction est exponentielle.

c) On demande une version non récursive de meilleure complexité (linéaire ici) :

```
def FiboV2(n):
    a,b = 1,1
    for k in range(n):
        a,b = b,a+b
    return a
```

On aurait pu programmer une fonction récursive en version terminale (donc de complexité linéaire) de la manière suivante :

```
def FiboV3(n,a=1,b=1):
    if n==0:
        return a
    return FiboV3(n-1,b,a+b)
```

Q25. $d_1 = \left|1\right| = \boxed{1}$; $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{2}$ et $d_3 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 \\ 0 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a_1 b_1 - a_2 b_2 = \boxed{3}$

Q26. On a

$$d_{n+2} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = -a_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{n+1} b_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \text{ ; or } a_{n+1} b_{n+1} = -1 \text{ donc :}$$

$$\boxed{d_{n+2} = d_{n+1} + d_n}$$

Q27. On a $d_1 = F_1 = 1$; $d_2 = F_2 = 2$ de plus $\left(d_n\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(F_n\right)_{n\geqslant 1}$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2, donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ d_n = F_n}$

PROBLÈME 2

Partie I

Q28. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1$ donc $\boxed{I_0 = \ln(2)}$

Q29. $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n$; et donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$$

Q30. $I_1 = \dfrac{1}{0+1} - I_0 = \boxed{1 - \ln(2)}$; $I_2 = \dfrac{1}{1+1} - I_1 = \boxed{-\dfrac{1}{2} + \ln(2)}$; $I_3 = \dfrac{1}{2+1} - I_2 = \boxed{\dfrac{5}{6} - \ln(2)}$ et

$$I_4 = \frac{1}{3+1} - I_3 = \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \ln(2) = \boxed{-\frac{7}{12} + \ln(2)}$$

Q31. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x$;
or pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 + x > 0$, $x^n \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$; donc, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et donc que $\boxed{\text{la suite } \left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

Q32. On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, donc la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
D'après **Q29** on a $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$; par passage à la limite, il vient $2\ell = 0$, donc $\ell = 0$ et ainsi

$$\boxed{\text{la suite } \left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$$

Q33. Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ (-1)^n I_n = \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

- *Initialisation :* $(-1)^1 I_1 = -1 + \ln(2)$ et $\ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^k}{k} = \ln(2) - 1$, donc la propriété est initialisée.
- *Hérédité :* On suppose que la propriété est vérifiée au rang n.
  $I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$, donc $(-1)^{n+1} I_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} - (-1)^{n+1} I_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^n I_n$
  par hypothèse de récurrence, il vient : $(-1)^{n+1} I_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k}$
- *Conclusion :* On a montré par récurrence que $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ (-1)^n I_n = \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}}$

Q34. La somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^n I_n - \ln(2)$; or, d'après **Q32**

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big((-1)^n I_n - \ln(2)\big) = -\ln(2)$; donc, par définition, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)}$$

Q35. Comme la suite (I_n) est décroissante, on a $I_n + I_{n+1} \leqslant I_n + I_n \leqslant I_{n-1} + I_n$; soit $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 2I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$; ou encore

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n}}$$

On divise par $\dfrac{1}{2n}$: $\dfrac{2n}{2(n+1)} \leqslant \dfrac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leqslant 1$; or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2(n+1)} = 1$; par théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1$; ce qui prouve que

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

Partie II

Q36.
- *Symétrie :* $\langle Q,P\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{Q(x)P(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \langle P,Q\rangle$; donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
- *Bilinéarité :* Soient P_1, P_2, Q trois polynômes et λ un réel ;
$$\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle = \int_0^1 \frac{(\lambda P_1(x)+P_2(x))Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^1 \frac{P_1(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{P_2(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$= \lambda\langle P_1,Q\rangle + \langle P_2,Q\rangle$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire par symétrie.
- *Positivité :* $\langle P,P\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(P(x)\big)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, et donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive.
- *Définie-positivité :* $\langle P,P\rangle = 0 \iff \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(P(x)\big)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$; la fonction $x \mapsto \dfrac{\big(P(x)\big)^2}{1+x}$ est continue et positive sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle, donc $\forall x\in[0,1],\ \dfrac{\big(P(x)\big)^2}{1+x} = 0 \iff \forall x\in[0,1],\ P(x)=0$; ainsi P possède une infinité de racines, il s'agit donc du polynôme nul, et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie-positive

$\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est symétrique, bilinéaire, positive et définie-positive, c'est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$

Q37. $\langle 1,X\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = I_1 = 1-\ln(2) \neq 0$; donc $\boxed{1 \text{ et } X \text{ ne sont pas orthogonaux}}$

Q38. $L(X^2)$ est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, donc $L(X^2)\in\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1,X)$; et donc

$$\boxed{\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad L(X^2) = \alpha X + \beta}$$

Q39. $L(X^2)$ est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, donc on peut dire que $\boxed{X^2 - L(X^2) \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_1[X]}$

Ainsi $\begin{cases} \langle 1, X^2 - L(X^2)\rangle = 0 \\ \langle X, X^2 - L(X^2)\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle 1, X^2 - \alpha X - \beta\rangle = 0 \\ \langle X, X^2 - \alpha X - \beta\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-\alpha x-\beta}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-\alpha x^2-\beta x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$

par linéarité de l'intégrale, on obtient $\begin{cases} I_2 - \alpha I_1 - \beta I_0 = 0 \\ I_3 - \alpha I_2 - \beta I_1 = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta = I_2 \\ I_2\alpha + I_1\beta = I_3 \end{cases}}$

Q40. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2-ax-b)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \langle X^2-aX-b, X^2-bX-b\rangle = \|X^2-aX-b\|^2$;
donc $m = \inf\{\|X^2-aX-b\|^2,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$, c'est-à-dire que m est le carré de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ et on sait que cette distance peut être définie par $\|X^2 - L(X^2)\|$; ce qui donne bien

$$\boxed{m = \|X^2-\alpha X-\beta\|^2 = \int_0^1 \frac{(x^2-\alpha x-\beta)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x}$$

Partie II

Q41. $f\big((a,b)\big) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2-ax-b)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4+a^2x^2+b^2-2ax^3-2bx^2+2abx}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et par linéarité, on a :

$$\boxed{f\big((a,b)\big) = a^2I_2 + b^2I_0 + 2abI_1 - 2aI_3 - 2bI_2 + I_4}$$

Q42. f est une fonction polynomiale en a et b donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

Q43. On résout $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2I_2 a + 2I_1 b - 2I_3 = 0 \\ 2I_0 b + 2I_1 a - 2I_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2 a + I_1 b = I_3 \\ I_1 a + I_0 b = I_2 \end{cases}$ ✪ ; ce système admet une unique solution si et seulement le déterminant $\begin{vmatrix} I_2 & I_1 \\ I_1 & I_0 \end{vmatrix} = I_2 I_0 - I_1^2$ est non nul.

Or $I_2 I_0 - I_1^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \ln(2)\right)\ln(2) - (1 - \ln(2))^2 = -\dfrac{\ln(2)}{2} + \left(\ln(2)\right)^2 - 1 + 2\ln(2) - \left(\ln(2)\right)^2 = \dfrac{3}{2}\ln(2) - 1$

On nous donne : $0,68 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,7 \Rightarrow 1,02 \leqslant \frac{3}{2}\ln(2) \leqslant 1,05$.

On a donc $I_2 I_0 - I_1^2 \neq 0$, ce qui prouve que le système a une unique solution et donc que

$$\boxed{f((a,b)) \text{ possède un unique point critique}}$$

Q44. Dans l'énoncé, il est admis que $f((a,b))$ admet un minimum atteint en un unique couple de réels ; comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert et que f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors ce minimum est atteint en un point critique.

D'après la question précédente et après résolution de ✪ on peut donc dire que m est atteint pour (a,b) avec

$$\boxed{a = \frac{I_0 I_3 - I_1 I_2}{I_0 I_1 - I_1^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{I_2^2 - I_1 I_3}{I_0 I_2 - I_1^2}}$$