CCS TSI MATHS1 2022

Florian Bouguet, Éric Mercier

version du 6 mai 2022

I Exponentielle réelle

I.A Une équation fonctionnelle

Q 1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc de classe $\mathscr{C}^1$.
De plus, $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ et pour tout couple de réels (s, t), on vérifie bien : $\mathrm{e}^{s+t} = \mathrm{e}^s \times \mathrm{e}^t$.
La fonction exponentielle est donc une solution de (I.1).

Q 2. Soit x un réel, d'après (I.1), on a : $f(x) f(1-x) = f(x+1-x) = f(1) = \mathrm{e}$.

Q 3. D'après **Q2**, pour tout réel x, $f(x)$ est non nul.
f étant supposée continue et non nulle sur $\mathbb{R}$, la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que f est d'un signe constant sur $\mathbb{R}$, or, $f(1) = \mathrm{e} > 0$. en conclusion, f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Toujours à l'aide de la **Q2**, avec $x = 0$, on obtient $f(0) f(1) = \mathrm{e} \Longleftrightarrow f(0) = 1$.

Q 5. Pour tout réel t fixé, la fonction $\varphi : s \mapsto f(s+t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
De plus, pour tout réel s, $\varphi(s) = f(s+t) = f(s) f(t)$, d'où la dérivée de φ : $\varphi'(s) = f'(s+t) = f'(s) f(t)$.

Q 6. En conclusion, pour $s = 0$, pour tout réel t, la fonction f vérifie : $f'(t) = f'(0) f(t)$.
Les solutions de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants sont les fonctions $t \mapsto k\mathrm{e}^{f'(0)t}$.

Q 7. On sait que $f(0) = 1$ ce qui équivaut à $k = 1$.
k est non nul puisque la fonction nulle n'est pas solution de (I.1), on a donc $k = 1$.
De plus, comme $f(1) = \mathrm{e}$, il vient immédiatement $f'(0) = 1$.
Finalement la fonction f est donc solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} f(0) & = 1 \\ f'(t) & = f(t) \end{cases}$$

Q 8. L'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Q 9. La fonction exponentielle (cours) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec un rayon de convergence infini et il est donné par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

I.B Un problème de probabilité faisant intervenir l'exponentielle réelle

Q 10. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 + x$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
La fonction $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement croissante et s'annule en 0, on en déduit donc le signe de h' et les variations de h.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^*$:
$$h(x) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x} > 1 - x.$$

Q 11. Soient θ et α deux réels strictement positifs, alors, $-\alpha\theta < 0$ donc $0 < 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\theta}$ et d'après la question précédente : $1 - \mathrm{e}^{-\alpha\theta} < \alpha\theta$.
Finalement :
$$0 < p = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} < 1$$

Q 12. Soit $(k, s) \in \mathbb{N}^2$,
- Si $s < k$ alors $\mathbb{P}_{(N_\theta = s)}(R_\theta = k) = 0$ car il est impossible qu'il y ait davantage de patients encore présents après l'instant θ que de patients arrivés dans l'intervalle $[0, \theta]$.
- Pour $k \leqslant s$, il s'agit de choisir k patients parmi s, sans ordre ni répétition. Il s'agit d'une répétition indépendante, comme le souligne le texte, d'épreuves de Bernoulli, dont la probabilité de succès est p. On obtient donc :
$$\mathbb{P}_{(N_\theta = s)}(R_\theta = k) = \binom{s}{k} p^k q^{s-k}$$

Q 13. On suppose dans cette question $k \leqslant s$, il vient alors (formule des probabilités composées) :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((R_\theta = k) \cap (N_\theta = s)) &= \mathbb{P}(N_\theta = s)\,\mathbb{P}_{(N_\theta = s)}(R_\theta = k) \\
&= \frac{\theta^s \mathrm{e}^{-\theta}}{s!} \binom{s}{k} p^k q^{s-k} \\
&= \frac{\theta^s \mathrm{e}^{-\theta}}{\cancel{s!}} \frac{\cancel{s!}}{k!\,(s-k)!} p^k q^{s-k} \\
&= \frac{\theta^s \mathrm{e}^{-\theta} p^k q^{s-k}}{k!\,(s-k)!} \\
&= \frac{\theta^k \theta^{s-k} \mathrm{e}^{-\theta} p^k q^{s-k}}{k!\,(s-k)!} \\
&= \frac{(p\theta)^k (q\theta)^{s-k} \mathrm{e}^{-\theta}}{k!\,(s-k)!}
\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat annoncé.

Q 14. On utilise ici le système complet d'événements infini $(N_\theta = s)_{s \in \mathbb{N}}$ et la formule des probabilités totales pour déterminer la loi marginale R_θ du couple (N_θ, R_θ), on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((R_\theta = k)) &= \sum_{s \in \mathbb{N}} \mathbb{P}((R_\theta = k) \cap (N_\theta = s)) \\
&\text{Cette probabilité est nulle pour } s \leqslant k \\
&= \sum_{s=0}^{k} 0 + \sum_{s=k}^{+\infty} \frac{(p\theta)^k (q\theta)^{s-k} \mathrm{e}^{-\theta}}{k!\,(s-k)!} \\
&= \frac{(p\theta)^k \mathrm{e}^{-\theta}}{k!} \sum_{s=k}^{+\infty} \frac{(q\theta)^{s-k}}{(s-k)!} \\
&= \frac{(p\theta)^k \mathrm{e}^{-\theta}}{k!} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(q\theta)^{s}}{(s)!} \\
&\text{On reconnaît ici le développement en série entière de la fonction exponentielle de rayon } +\infty \\
&= \frac{(p\theta)^k \mathrm{e}^{-\theta}}{k!} \mathrm{e}^{q\theta} \\
&= \frac{(p\theta)^k \mathrm{e}^{(q-1)\theta}}{k!} = \frac{(p\theta)^k \mathrm{e}^{-p\theta}}{k!}
\end{aligned}$$

Q 15. D'après la question précédente, R_θ suit la loi de Poisson de paramètre $p\theta$ son espérance est donc $\mathrm{E}(R_\theta) = p\theta$.

II Forme exponentielle des fonctions trigonométriques

Q 16. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$z(t+2\pi) = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+2\pi)} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(t+2\pi)}}{3} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\pi}}{3} = z(t),$$
$$z(-t) = \frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}{3} = \frac{2\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} + \overline{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}}{3} = \overline{z(t)}.$$

Q 17. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les points $M(t+2\pi)$ et $M(t)$ sont égaux. On restreint donc l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$. De plus, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, les points $M(-t)$ et $M(t)$ ont des affixes conjuguées, ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$ et il suffira de faire la symétrie de la courbe partielle par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir la courbe totale. On choisit donc $\gamma = \pi$.

Q 18. La fonction z est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in [-\pi, \pi]$. Alors

$$z'(t) = 0 \iff \frac{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{3} = 0 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = e^{-2\mathrm{i}t} \iff t \equiv -2t\ [2\pi] \iff 3t \equiv 0\ [2\pi]$$
$$\iff t \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right] \iff t \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

Ainsi les points $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $M(0)$ et $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sont stationnaires.

Q 19. Calculons les affixes des trois points stationnaires. D'après **Q16**,

$$z(0) = \frac{2\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0}{3} = 1,$$
$$z\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}{3} = \frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},$$
$$z\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \overline{z\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

On remarque que $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $M(0)$ et $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ont pour affixes les racines troisièmes de l'unité, et forment donc un triangle équilatéral.

Q 20. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$z\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)}}{3} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}{3} = z(t) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

Q 21. On déduit de la question précédente que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ est l'image du point M par la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Cette rotation laisse donc la courbe Γ invariante.

Q 22. Soit $t \in [0, \pi]$. Alors

$$x(t) = \mathfrak{Re}\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{3}\right) = \frac{2\cos t + \cos(-2t)}{3} = \frac{2\cos t + 2\cos^2 t - 1}{3},$$
$$y(t) = \mathfrak{Im}\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + e^{-2\mathrm{i}t}}{3}\right) = \frac{2\sin t + \sin(-2t)}{3} = \frac{2\sin t - 2\cos t \sin t}{3}.$$

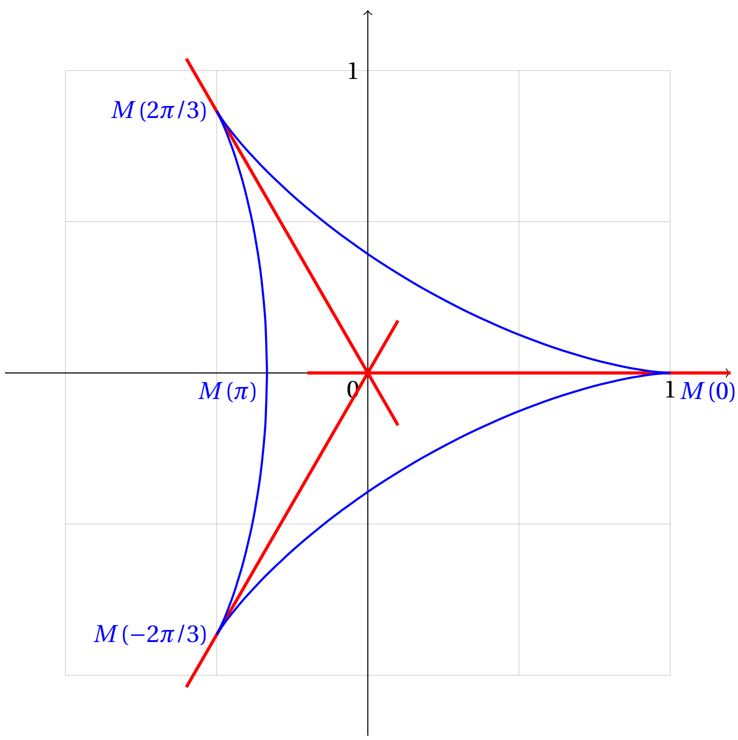
x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (car z l'est) et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = \frac{-2\sin t - 4\sin t \cos t}{3} = -\frac{4}{3}\sin t\left(\cos t + \frac{1}{2}\right),$$
$$y'(t) = \frac{2\cos t + 2\sin^2 t - 2\cos^2 t}{3} = \frac{2}{3}\left(2 + 2\cos t - 4\cos^2 t\right) = -\frac{4}{3}(\cos t - 1)\left(\cos t + \frac{1}{2}\right).$$

En effet les racines du polynôme $1 + X - 2X^2$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$. On calcule enfin $z(\pi) = -\frac{1}{3}$, et on obtient alors le double tableau de variations suivant :

t	0		$\dfrac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	1	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$-1/3$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0

Notons Δ_t la tangente à Γ au point $M(t)$. On a admis que Δ_0 passe par O. D'après la question **Q20**, $\Delta_{2\pi/3}$ est l'image de Δ_0 par ρ ; elle passe donc elle aussi par O. Ainsi $\Delta_{2\pi/3}$ passe par les points O et $M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$. De même, $\Delta_{-2\pi/3}$ passe par les points O et $M\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)$. D'où le tracé de Γ :



Q 23. D'après la question **Q20**, la longueur ℓ de la courbe Γ est le triple de la longueur de l'arc entre $M(0)$ et $M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Donc

$$\ell = 3\int_0^{2\pi/3} |z'(t)|\,dt = 3\int_0^{2\pi/3} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Soit $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Alors

$$\begin{aligned} |z'(t)|^2 &= \frac{4}{9}\left(\sin^2 t\,(1+2\cos t)^2 + (1-\cos t)^2(1+2\cos t)^2\right) = \frac{4}{9}(1+2\cos t)^2\left(\sin t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) \\ &= \frac{8}{9}(1+2\cos t)^2(1-\cos t) = \frac{8}{9}\left(1+3\cos t - 4\cos^3 t\right). \end{aligned}$$

Or, en linéarisant $\cos^3 t$,

$$\cos^3 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{3}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}}{8} = \frac{\cos(3t)+3\cos t}{4}.$$

Donc

$$|z'(t)|^2 = \frac{8}{9}(1-\cos 3t) = \frac{8}{9}\left(1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{3t}{2}\right)\right)\right) = \frac{16}{9}\sin^2\left(\frac{3t}{2}\right).$$

Or $0 \leqslant \frac{3t}{2} \leqslant \pi$ donc $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \geqslant 0$, ainsi

$$\ell = 3 \times \frac{4}{3} \times \int_0^{2\pi/3} \left|\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right| dt = 4\int_0^{2\pi/3} \sin\left(\frac{3t}{2}\right) dt = \left[-\frac{8}{3}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]_0^{2\pi/3} = \frac{16}{3}.$$

III Exponentielle de deux matrices

Q 24. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$u \in \ker(f-\mathrm{Id}) \iff f(x,y) = (x,y) \iff \begin{cases} 3x-6y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \iff x = 2y \iff u \in \mathrm{Vect}(2,1),$$
$$u \in \ker(f-2\mathrm{Id}) \iff f(x,y) = (x,y) \iff \begin{cases} 2x-6y=0 \\ x-3y=0 \end{cases} \iff x = 3y \iff u \in \mathrm{Vect}(3,1).$$

En notant $u_1 = (2,1)$ et $u_2 = (3,1)$, on a donc montré que $\ker(f-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $\ker(f-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u_2)$ sont deux droites vectorielles. De plus, les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\ker(f-\mathrm{Id})$ et $\ker(f-\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Q 25. Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2)$ et $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2)$. On sait que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, d'après la formule de changement de base,

$$Q_1 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \quad Q_2 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Par la méthode du pivot, on calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, d'où

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Q 26. q_1 et q_2 sont des projecteurs, donc $q_1^2 = q_1$ et $q_2^2 = q_2$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $q_1(u) \in F_1$ donc $q_2(q_1(u)) = 0$. Ainsi $q_2 \circ q_1 = 0$. De même $q_1 \circ q_2 = 0$. De plus F_1 et F_2 sont supplémentaires, donc pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = x_1 + x_2$. Or on sait que $x_1 = q_1(u)$ et $x_2 = q_2(u)$. Donc $u = q_1(u) + q_2(u)$, donc $q_1 + q_2 = \mathrm{Id}$. De toutes ces relations, on déduit bien que

$$Q_1^2 = Q_1, \quad Q_2^2 = Q_2, \quad Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = O_2, \quad Q_1 + Q_2 = I_2.$$

Enfin

$$Q_1 + 2Q_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

Q 27. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$.
— Initialisation : Pour $k = 0$, d'après la question précédente, on a bien

$$Q_1 + 2^0 Q_2 = Q_1 + Q_2 = I_2 = A^0.$$

— Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$. Alors, d'après les propriétés de la **Q26**,

$$A^{k+1} = AA^k = (Q_1 + 2Q_2)\left(Q_1 + 2^k Q_2\right) = Q_1^2 + 2Q_2Q_1 + 2^k Q_1Q_2 + 2^{k+1}Q_2^2 = Q_1 + 2^{k+1}Q_2.$$

La propriété est donc bien démontrée au rang $k+1$.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$.

Q 28. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Q 29. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après **Q25** et **Q27**,

$$A^k = \begin{pmatrix} -2 + 6 \times 2^k & 6 - 6 \times 2^k \\ -1 + 2^k & 3 - 2 \times 2^k \end{pmatrix}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}\left(-2 + 6 \times 2^k\right) & \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}\left(6 - 6 \times 2^k\right) \\ \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}\left(-1 + 2^k\right) & \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}\left(3 - 2 \times 2^k\right) \end{pmatrix}.$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(-2 + 6 \times 2^k\right) = -2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -2e^t + 6e^{2t}.$$

On effectue le calcul similaire pour les trois autres coordonnées, et donc, en revenant à la définition de convergence de matrice donnée dans l'énoncé,

$$E_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{bmatrix} -2\mathrm{e}^t + 6\mathrm{e}^{2t} & 6\mathrm{e}^t - 6\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} & 3\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} = \mathrm{e}^t Q_1 + \mathrm{e}^{2t} Q_2.$$

Ainsi, la suite $(E_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers $E(t)$.

Q 30. D'après les propriétés de la **Q26** et la définition de E :

— On a

$$E(0) = \mathrm{e}^0 Q_1 + \mathrm{e}^0 Q_2 = Q_1 + Q_2 = I_2.$$

— Soit $s, t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} E(t)E(s) &= \left(\mathrm{e}^t Q_1 + \mathrm{e}^{2t} Q_2\right)\left(\mathrm{e}^s Q_1 + \mathrm{e}^{2s} Q_2\right) = \mathrm{e}^t \mathrm{e}^s Q_1^2 + \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{2s} Q_2^2 + \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{2s} Q_1Q_2 + \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^s Q_2Q_1 \\ &= \mathrm{e}^{t+s} Q_1 + \mathrm{e}^{2(t+s)} Q_2 = E(t+s). \end{aligned}$$

— Soit $t \in \mathbb{R}$. Chaque coordonnée de $E(t)$ s'exprime comme une combinaison linéaire de e^t et e^{2t}, donc E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $E'(t) = \mathrm{e}^t Q_1 + 2\mathrm{e}^{2t} Q_2$. Alors

$$AE(t) = (Q_1 + 2Q_2)\left(\mathrm{e}^t Q_1 + \mathrm{e}^{2t} Q_2\right) = \mathrm{e}^t Q_1^2 + 2\mathrm{e}^{2t} Q_2^2 + \mathrm{e}^{2t} Q_1Q_2 + 2\mathrm{e}^t Q_2Q_1 = E'(t).$$

Q 31. La notation proposée est cohérente car, d'après la question précédente, la fonction E vérifie l'équation fonctionnelle et l'équation différentielle de l'exponentielle réelle vues en partie **I.A**. D'autre part, par abus de notation, on pourrait noter que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(t) = \mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$$

ce qui reste cohérent avec la définition de l'exponentielle par sa série entière.

Q 32. En reconnaissant une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on peut donc remarquer que g est la rotation vectorielle d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Q 33. D'après la question précédente, on a $g^2 = -\mathrm{Id}$ donc $B^2 = -I_2$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^{2n} = (-I_2)^n = (-1)^n I_2,$$
$$B^{2n+1} = B^{2n}B = (-1)^n B.$$

Q 34. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{i=0}^{2n+1} \frac{t^i}{i!} B^i = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} B^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}$$

Notons $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Alors, d'après la **Q28**, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} R_{2n+1} = R(t)$. De plus,

$$R_{2n}(t) = \sum_{i=0}^{2n+1} \frac{t^i}{i!} B^i = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} B^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1},$$

on montre donc de même que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_{2n+1} = R(t)$. Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_{2n}(t) = \lim_{n \to +\infty} \alpha_{2n+1}(t) = \cos t.$$

On en déduit que la suite $(\alpha_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\cos t$. De même, les suites $\left(\beta_n(t)\right), \left(\gamma_n(t)\right), (\delta_n(t))$ convergent respectivement vers $-\sin t, \sin t, \cos t$. Donc $(R_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $R(t)$.

Q 35. La matrice $R(t)$ est la matrice de la rotation vectorielle du plan d'angle t.

IV Un système différentiel

Q 36.

$$\operatorname{rg}(A - I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

On en déduit, d'après le théorème du rang, que $\dim \ker(A - I_3) = 2$. Donc 1 est valeur propre de A et l'espace propre associé est de dimension 2. (1 est donc une valeur propre d'ordre de multiplicité au moins égal à 1).

On vérifie sans aucune difficulté que $Av_1 = v_1$ et $Av_2 = v_2$. De plus, v_1 et v_2 étant non nuls, ce sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1, enfin, comme ces 2 vecteurs sont non colinéaires, ils forment une famille libre de deux vecteurs du sous espace vectoriel $E_1 = \ker(A - I_3)$ qui est de dimension 2, en conclusion, (v_1, v_2) est une base de E_1.

Q 37. De la même façon,

$$\operatorname{rg}(A + I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

D'après le théorème du rang, $\dim \ker(A + I_3) = 1$. Donc -1 est valeur propre de A et l'espace propre associé est de dimension 1.

On vérifie $Av_3 = -v_3$, v_3 étant non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, or $E_{-1} = \ker(A + I_3)$ est de dimension 1, en conclusion, (v_3) est une base de E_{-1}.

Q 38. (v_1, v_2, v_3) est une base de vecteurs propres de A et c'est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut par exemple le justifier en étudiant :

$$\operatorname{rg}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Q 39. A est, d'après ce qui précède, diagonalisable.

Dans la base de vecteurs propres (v_1, v_2, v_3), A est semblable à $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$.

On a donc , $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On ne demande pas ici de déterminer P^{-1} et c'est inutile pour la suite.

Q 40. On considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ (IV.1).
On pose $X(t) = PY(t)$ ce qui équivaut à $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
Par linéarité de la dérivation, on a $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
donc :

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff Y' = DY \end{aligned}$$

Ce dernier système différentiel s'écrit : $\begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= -y_3 \end{cases}$ Les solutions sont : $\begin{cases} y_1(t) &= k_1 \mathrm{e}^t \\ y_2(t) &= k_2 \mathrm{e}^t \\ y_3(t) &= k_3 \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ où $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$ dépendent des conditions initiales.

Il reste alors à déterminer $X(t) = PY(t)$ soit : $\begin{cases} x_1(t) &= -k_1 \mathrm{e}^t + k_3 \mathrm{e}^{-t} \\ x_2(t) &= k_1 \mathrm{e}^t + k_3 \mathrm{e}^{-t} \\ x_3(t) &= k_2 \mathrm{e}^t - k_3 \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

Q 41. On recherche enfin l'unique solution vérifiant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On résout :
$\begin{cases} -k_1 + k_3 = a \\ k_1 + k_3 = b \\ k_2 - k_3 = c \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = \frac{-a+b}{2} \\ k_3 = \frac{a+b}{2} \\ k_2 = c + \frac{a+b}{2} \end{cases}$

L'unique solution du problème est donc : $X(t) = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2}\mathrm{e}^t + \frac{a+b}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{-a+b}{2}\mathrm{e}^t + \frac{a+b}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{a+b+2c}{2}\mathrm{e}^t + \frac{a+b}{2}\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & -\mathrm{sh}(t) & 0 \\ -\mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) & 0 \\ \mathrm{ch}(t) & \mathrm{ch}(t) & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

L'application recherchée est donc :

$$M : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & -\mathrm{sh}(t) & 0 \\ -\mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) & 0 \\ -\mathrm{ch}(t) & -\mathrm{sh}(t) & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \end{cases}$$