CCS TSI MATHS 2 2022

Éric Mercier

version du 19 mai 2022

I Première partie

I.A Calculs préliminaires

Q1. N est un entier supérieur à 2. On pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}$.
Les racines N-ièmes de l'unité sont les complexes de l'ensemble $\mathscr{S} = \left\{\omega^k,\ k \in [\![0, N-1]\!]\right\}$.

On peut redémontrer ce résultat en écrivant z sous forme exponentielle, $z^N = 1 \Longleftrightarrow \rho^N \mathrm{e}^{N\mathrm{i}\theta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho & = 1 \\ \theta & \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{N}\right] \end{cases}$.

Q2. $\omega^j = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2j\pi}{N} \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow j \equiv 0[N] \Leftrightarrow j \in \{kN,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
L'ensemble cherché est l'ensemble des multiples de N.

Q3. Soit $k \in \mathbb{N}$, les propriétés usuelles de la conjugaison des nombres complexes permettent d'écrire :

$$\frac{1}{\omega^k} = \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}k\pi}{N}} = \overline{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{N}}} = \overline{\omega^k} = \overline{\omega}^k$$

Q4. — Pour $q = 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$,

— Pour $q \neq 1$, alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$ (somme des termes d'une suite géométrique).

Q5. — Pour $r = 0$, $\omega^r = 1$, donc, d'après la question **Q4**, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{rn} = N.$$

— Pour $r \in [\![1, N-1]\!]$, d'après la question **Q2**, r n'étant pas un multiple de N, $\omega^r \neq 1$ donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{rn} = \frac{1-\omega^{Nr}}{1-\omega^r} = 0 \text{ car } \omega^N = 1$$

— Enfin, pour $r \in [\![-(N-1), -1]\!]$, $\omega^r = \dfrac{1}{\omega^{-r}}$ avec $-r \in [\![1, N-1]\!]$, donc $\omega^{-r} \neq 1$ et $\omega^r \neq 1$ et le même calcul que précédemment donne le même résultat :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{rn} = \frac{1-\omega^{Nr}}{1-\omega^r} = 0 \text{ car } \omega^N = 1$$

I.B Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

Q6. Soit $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}$, on a :
— $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}0t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = a_0$. Donc la propriété annoncée est vraie pour $k = 0$.

— On suppose $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\cos(-kt)+\mathrm{i}\sin(-kt)\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t\\ &\quad\text{par linéarité de l'intégrale et à l'aide des parités des fonctions trigonométriques}\\ &= \frac{1}{2}a_k - \mathrm{i}\frac{1}{2}b_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k)\end{aligned}$$

Puis exactement de la même façon :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-k)t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\cos(kt)+\mathrm{i}\sin(kt)\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k)\end{aligned}$$

Il est donc bien démontré que :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

Q7. **Théorème de Parseval** : Si f une fonction 2π-périodique et continue (par morceaux est suffisant) sur $\mathbb{R}$ alors les séries $\sum(a_n(f))^2$ et $\sum(b_n(f))^2$ convergent et on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2\,\mathrm{d}t = (a_0(f))^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right)$$

Q8. Pour tout entier naturel k non nul comme a_k et b_k sont des réels, d'après la définition des coefficients c_k :

$$\left|c_{-k}(f)\right|^2 = \left|c_k(f)\right|^2 = \frac{1}{4}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

La fonction f satisfaisant les conditions du théorème de Parseval, on en déduit que les séries $\sum(a_n(f))^2$ et $\sum(b_n(f))^2$ convergent, donc leurs termes généraux convergent vers 0 $\left(\lim\limits_{k\to+\infty} a_k(f) = \lim\limits_{k\to+\infty} b_k(f) = 0\right)$.
Par somme, on en déduit donc : $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k(f) = \lim\limits_{k\to+\infty} c_{-k}(f) = 0$.

Q9. f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ donc f' est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, les intégrales définissant les coefficients $a_k(f')$ et $b_k(f')$ existent donc.

Q10. Soit k un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned}a_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\\ &\quad\text{on intègre par parties avec des fonctions de classe } \mathscr{C}^1 \text{ et } k \text{ étant non nul}\\ &= \underbrace{\left[f(t)\cos(kt)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(-k\sin(kt))\,\mathrm{d}t\\ &= k\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\sin(kt))\,\mathrm{d}t = kb_k(f)\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}b_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{\left[f(t)\sin(t)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)k\cos(kt)\,\mathrm{d}t\\ &= -ka_k(f)\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$: $c_k(f') = \frac{1}{2}\left(a_k(f') - ib_k(f')\right) = \frac{1}{2}\left(kb_k(f) + ika_k(f)\right) = \mathrm{i}kc_k(f)$.

Q11. Comme f' est une fonction continue, elle satisfait aux conditions du théorème de Parseval, donc, d'après **Q8** : $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k(f') = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} k\left|c_k(f)\right| = \lim\limits_{k\to+\infty} k\left|\dfrac{c_k(f')}{\mathrm{i}k}\right| = \lim\limits_{k\to+\infty}\left|c_k(f')\right| = 0$.

Finalement : $\left|c_k(f)\right| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

En utilisant **Q8**, $\left|c_{-k}(f)\right| = \left|c_k(f)\right| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

II Diagonalisation des matrices circulantes

II.A Étude du cas $N = 3$

On note $G_3 = C(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Q12. Il est immédiat que $G_3 \times G_3^T = I_3$ donc on a bien $G_3 \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ puisque G_3 est à coefficients réels.

$\det G_3 = 1$ donc $G_3 \in \mathscr{S}\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ et on en déduit que c'est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$.

C'est la rotation d'axe dirigé par $\vec{u} = (1,1,1)$ (trivialement invariant) et d'angle θ vérifiant, par invariance de la trace : $1 + 2\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

De plus, comme l'image du premier vecteur de base $\vec{i}$ est le troisième $\vec{k}$ et que l'on a $\det\left(\vec{u},\vec{i},\vec{k}\right) = -1$, on en déduit que la rotation canoniquement associée à G_3 est la rotation d'axe dirigé par $\vec{u} = (1,1,1)$ et d'angle $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Q13. Il vient directement : $\chi_{G_3}(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda - j\right)\left(\lambda - \bar{j}\right)$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

Les valeurs propres de G_3 sont les racines cubiques de l'unité.

Le polynôme caractéristique de G_3 est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc la matrice G_3 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

En revanche, ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, donc G_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Q14. On détermine les espaces propres associés aux valeurs propres de G_3.

D'après la question précédente, $\mathrm{sp}(G_3) = \left\{1, j, \bar{j}\right\}$.

On a déjà vu **Q12** que $\vec{u} = (1,1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Or, comme cette valeur propre est d'ordre 1, son sous-espace propre associé est une droite vectorielle. En conséquence : $E_1 = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

De la même façon, on démontre que les deux autres espaces propres sont aussi des droites vectorielles et que : $E_j = \mathrm{Vect}((j^2,1,j))$ et $E_{\bar{j}} = \mathrm{Vect}((j,1,j^2))$.

On pose $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$ et l'on obtient :

$G_3 = P_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} P_3^{-1}$.

Q15. Soit $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3$

On a $G_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on obtient donc :

$$\begin{aligned} C(a_0,a_1,a_2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} &= a_0 I_3 + a_1 G_3 + a_2 G_3^2 = a_0 I_3 + a_1 P_3 G_3 P_3^{-1} + a_2\left(P_3 G_3 P_3^{-1}\right)^2 \\ &= a_0 P_3 P_3^{-1} + a_1 P_3 D_3 P_3^{-1} + a_2 P_3 D_3^2 P_3^{-1} = P_3\left(a_0 I_3 + a_1 D_3 + a_2 D_3^2\right) P_3^{-1} \end{aligned}$$

II.B Étude du cas général

On note $G_N = C(0,1,0,\dots,0) \in \mathscr{M}_N(\mathbb{C})$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ de $\mathbb{C}^N$ est G_N.

Q16. Comme :

$$G_N = C(0,1,0,\dots,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de G_N est :

$$\chi_{G_N}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

le premier déterminant étant celui d'une matrice triangulaire supérieure

on développe le second suivant la première colonne

$$= \lambda^N - (-1)^{N-2} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

C'est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous égaux à -1

$$= \lambda^N - (-1)^{2(N-2)} = \lambda^N - 1$$

Q17. On a $\chi_{G_N}(\lambda) = \lambda^N - 1 = \prod_{k=0}^{N-1} \left(\lambda - \omega^k\right)$.

G_N est diagonalisable dans $\mathscr{M}_N(\mathbb{C})$ car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

On a $\mathrm{sp}(G_N) = \mathbb{U}_N = \left\{\omega^k,\, k \in [\![0, N-1]\!]\right\}$

On pose à présent :

$$P_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} = \left(\omega^{(r-1)(s-1)}\right)_{(r,s)\in[\![1,N]\!]}$$

Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on note C_k la k-ième colonne de la matrice P_N.

Q18. Soit $k \in [\![1, N]\!]$, On a : $C_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{k-1} \\ \vdots \\ \left(\omega^{k-1}\right)^{N-1} \end{pmatrix}$

$$G_N C_k = \begin{pmatrix} \omega^{k-1} \\ \left(\omega^{k-1}\right)^2 \\ \vdots \\ \left(\omega^{k-1}\right)^{N-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \omega^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{k-1} \\ \vdots \\ \left(\omega^{k-1}\right)^{N-2} \\ \frac{1}{\omega^{k-1}} = \left(\omega^{k-1}\right)^{N-1} \end{pmatrix} = \omega^{k-1} C_k.$$

C_k étant non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre ω^{k-1} pour $k \in [\![1, N]\!]$.
En conclusion, $\mathrm{sp}(G_k) = \left\{\omega^k,\ k \in [\![0, N-1]\!]\right\}$, et comme $\omega^N = \omega^0 = 1$, $\mathrm{sp}(G_k) = \left\{\omega^k,\ k \in [\![1, N]\!]\right\}$.

Q19. La famille $(C_1, C_2, \dots, C_N)$ est une famille de vecteurs propres associés aux N valeurs propres $\left\{\omega^k,\ k \in [\![1, N]\!]\right\}$. Cette famille est libre et c'est donc une base de vecteurs propres de G_N.
On en déduit par la même que $P_N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une matrice de changement de base.

Q20. On obtient, avec les résultats de **Q3** et **Q4** :

$$P_N \overline{P_N} = P_N \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \bar{\omega} & \cdots & \bar{\omega}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \bar{\omega}^{N-1} & \cdots & \bar{\omega}^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{1}{\omega} & \cdots & \frac{1}{\omega}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{\omega}^{N-1} & \cdots & \frac{1}{\omega}^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N \end{pmatrix} = N I_N$$

D'où $P_N^{-1} = \dfrac{1}{N} \overline{P_N}$.

Q21. On a immédiatement : $g(e_1) = e_N$, et pour $j \in [\![2, N]\!]$, $g\left(e_j\right) = e_{j-1}$.

Q22. Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$ et $j \in [\![1, N]\!]$, par itérations :
— Si $j > k$ $g^k\left(e_j\right) = e_{j-k}$
— Si $j \leqslant k$, $g^k\left(e_j\right) = e_{N-(k-j)}$

Q23. De **Q22** on déduit :
$G_N^0 = I_N = C\,(1, 0, \dots, 0)$
$G_N^1 = C\,(0, 1, \dots, 0)$,

Et pour tout $k \in [\![2, N-1]\!]$: $G_N^k = C\left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{colonne } k+1}, 0, \dots\right)$.

Q24. Il vient alors, en posant : $D_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{N-1} \end{pmatrix}$ et en redémontrant par récurrence que pour tout entier k on a $G_N^k = P_N D_n^k P_N^{-1}$:

$$\begin{aligned} C\left(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\right) &= a_0 I_N + a_1 G_N + a_2 G_N^2 + \dots + a_{N-1} G_N^{N-1} \\ &= a_0 I_N + a_1 P_N D_N P_N^{-1} + a_2 P_N D_N^2 P_N^{-1} + \dots + a_{N-1} P_N D_N^{N-1} P_N^{-1} \\ &= P_N \left(a_0 I_N + a_1 D_N + a_2 D_N^2 + \dots + a_{N-1} D_N^{N-1}\right) P_N^{-1} \\ &= P_N \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} a_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{k(N-1)} \end{pmatrix} P_N^{-1} \end{aligned}$$

Q25. On en déduit, comme le déterminant est invariant par changement de base que :

$$\det(C(a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})) = \prod_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{jk} = \prod_{j=0}^{N-1} P\left(\omega^j\right)$$

En notant P le polynôme $P = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k$.

III Discrétisation et transformée de Fourier discrète

III.A Approximation des coefficients de Fourier

Soit f une fonction de $\mathscr{C}^0_{2\pi}$.
Le N-uplet $\left(f\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\right)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ est un échantillon de ce signal.

Q26. On reconnaît ici la méthode d'approximation des intégrales par la méthode des rectangles à gauche (intégrales de Riemann) qui permet d'affirmer que l'on a la convergence de ces suites et : $\lim\limits_{N\to+\infty} a'_0(N) = a_0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{N\to+\infty} a'_k(N) = a_k$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} b'_k(N) = b_k$.

Q27. Pour tout entier relatif k, $\lim\limits_{N\to+\infty} c'_k(N) = c_k$ d'après les limites des parties réelles et imaginaires obtenues à la **Q26**.

III.B Formule d'inversion

Si $u = (u_n)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ est un échantillon de taille N, on définit $\hat{u} = (\hat{u}_k)_{0\leqslant k\leqslant N-1}$ par

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], \quad \hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi n/N}$$

L'échantillon $\hat{u}$ s'appelle la transformée de Fourier d'ordre N de l'échantillon u.

Q28. Pour $k > 0$, la somme comporte N termes, il y a donc $N-1$ additions, chaque terme nécessite une unique multiplication, la première étant une multiplication par 1, il y a donc $N-1$ multiplications. Il y a alors $2(N-1)$ opérations pour chaque terme de la série.

La première série (pour $k = 0$) ne comporte que des multiplications sont toutes avec le facteur 1, le nombre d'opérations pour cette série est donc $N-1$.

En conclusion, $N - 1 + 2(N-1)^2 = (N-1)(2N-1)$ opérations sont nécessaires pour calculer les N termes de la transformée de Fourier $\hat{u}$.

Q29. En utilisant l'écriture matricielle des N égalités de (III.1) et les résultats de la question **Q20** on obtient :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-1} \end{pmatrix} = P_N \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = P_N^{-1} \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} P_N \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-1} \end{pmatrix}$$

Ce qui fournit le résultat

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], \quad u_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi n/N}.$$

Q30. Soit $\ell \in [\![1, N-1]\!]$

$\hat{u}_{N-\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-\ell)2\pi n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell 2\pi n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell 2\pi n/N} = \overline{\hat{u}_\ell}$

Q31. On suppose que l'entier naturel N est pair.

La connaissance des $\frac{N}{2}$ premiers termes de la transformée de Fourier permet de déterminer les autres à l'aide de l'égalité précédente.

Le premier terme ne demande que $N-1$ additions et les $\dfrac{N}{2}-1$ autres termes demandent chacun $2(N-1)$ opérations comme vu précédemment.

En conclusion, le nombre d'opérations nécessaires est $N-1+\left(\dfrac{N}{2}-1\right)2(N-1)=(N-1)^2$ opérations.

Q32. Le nombre d'opérations, au voisinage de l'infini, est équivalent à N^2.

IV Transformée de Fourier rapide

On suppose que u est un échantillon dont la taille N est une puissance de 2 ; on écrit donc $N=2^j$, $j\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier r compris entre 0 et $\dfrac{N}{2}-1$, on pose $y_r=u_{2r}$ et $z_r=u_{2r+1}$ ce qui définit deux échantillons y et z de taille $\dfrac{N}{2}$.

Q33. On a d'une part :

$$\hat{u}_{N/2}=\sum_{n=0}^{N-1}u_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n}=\sum_{n=0}^{N-1}u_n(-1)^n=\sum_{r=0}^{N/2-1}u_{2r}-\sum_{r=0}^{N/2-1}u_{2r+1}$$

et d'autre part :

$$\hat{y}_0=\sum_{r=0}^{N/2-1}y_r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}02\pi n2/N}=\sum_{r=0}^{N/2-1}y_r=\sum_{r=0}^{N/2-1}u_{2r}$$

$$\hat{z}_0=\sum_{r=0}^{N/2-1}z_r=\sum_{r=0}^{N/2-1}u_{2r+1}$$

Ce qui permet de conclure : $\hat{u}_{N/2}=\hat{y}_0-\hat{z}_0$.

Q34. Soit $k\in\left[\!\left[0,\dfrac{N}{2}-1\right]\!\right]$.

$$\begin{aligned}\hat{u}_k&=\sum_{n=0}^{N-1}u_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi n/N}\\&=\sum_{r=0}^{N/2-1}u_{2r}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi 2r}{N}}+\sum_{r=0}^{N/2-1}u_{2r+1}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi(2r+1)}{N}}\\&=\sum_{r=0}^{N/2-1}y_r\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi r}{\frac{N}{2}}}+\sum_{r=0}^{N/2-1}z_r\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi(2r)}{N}}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi}{N}}\\&=\hat{y}_k+\bar{\omega}^k\times\sum_{r=0}^{N/2-1}z_r\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi r}{\frac{N}{2}}}\\&=\hat{y}_k+\bar{\omega}^k\hat{z}_k\end{aligned}$$

Et de la même façon, avec $k+N/2\in\left[\!\left[\dfrac{N}{2},N-1\right]\!\right]$.

$$\begin{aligned}\hat{u}_{k+N/2}&=\sum_{n=0}^{N-1}u_n\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(k+N/2)\pi n/N}\\&=\sum_{r=0}^{N/2-1}u_{2r}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi 2r}{N}}\underbrace{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}r\pi}}_{=1}+\sum_{r=0}^{N/2-1}u_{2r+1}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi(2r+1)}{N}}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2r+1)\pi}}_{=-1}\\&=\hat{y}_k-\bar{\omega}^k\hat{z}_k\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall k\in\left[\!\left[0,\frac{N}{2}-1\right]\!\right],\quad\begin{cases}\hat{u}_k=\hat{y}_k+\bar{\omega}^k\hat{z}_k,\\\hat{u}_{k+N/2}=\hat{y}_k-\bar{\omega}^k\hat{z}_k\end{cases}$$

Q35. Pour $N=2$, il suffit de connaître y_0 et z_0 pour déterminer les termes de la transformée de Fourier de u puisque : $\hat{u}_1=\hat{y}_0-\hat{z}_0$ et $\hat{u}_0=\hat{y}_0+\hat{z}_0$

De plus, les calculs de $\hat{y}_0$ et $\hat{z}_0$ ne comportent aucune opération.

Il semble donc que $T(2)=2$ (contrairement au 3 qu'annonce l'énoncé ?).

Pour tout entier j supérieur ou égal à 2 ,

$$\forall r\in[\![2,j]\!],\quad T\left(2^r\right)\leqslant 2T\left(2^{r-1}\right)+4\times 2^{r-1}.$$

Q36. Soit $N=2^j$ avec $j\in\mathbb{N}^*$.

À l'aide de la question **Q36** en considérant la suite auxiliaire $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant j}$, définie par $t_k = \dfrac{T\left(2^k\right)}{2^k}$, on a à l'aide d'une récurrence simple :

$$\forall k \in [\![1, j]\!],\ 0 < t_k \leqslant t_1 + 2k$$

Il vient alors :

$$T\left(2^j\right) \leqslant 2^j \times 2j$$

Or $\ln(N) = j\ln(2)$, d'où :

$$T\left(2^j\right) \leqslant N \times \frac{2\ln(N)}{2}.$$

Q37. La complexité de cette méthode est en $O(N\ln N)$ donc bien plus efficace que la précédente en $O(N^2)$ d'après les croissances comparées.

V Convolution circulaire

Q38. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite périodique de période N, pour tout entier relatif $p \in [\![-N+1, -1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{p+N-1} u_k &= \sum_{k=p}^{-1} u_k + \sum_{k=0}^{p+N-1} u_k \\
&= \sum_{k=p}^{-1} u_{k+N} + \sum_{k=0}^{p+N-1} u_k \text{ par périodicité} \\
&= \sum_{k=N+p}^{N-1} u_k + \sum_{k=0}^{p+N-1} u_k \text{ décalage d'indices} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} u_k
\end{aligned}$$

Si $p = 0$ l'égalité est triviale.

$u * v$, appelée convolée circulaire des suites u et v, définie par $\forall n \in \mathbb{Z}, (u*v)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k}$.

Q39. On considère deux suites u et v périodiques de même période N.
Alors pour tout entier n de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
(u*v)_{n+N} &= \sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n+N-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k} \text{ car } v \text{ est } N\text{-périodique} \\
&= (u*v)_n
\end{aligned}$$

La convolée de u et v est donc une suite périodique de période N.

Q40. Le germe de $r * s$ est $(6+8+15, 5+12+12, 4+10+18) = (29, 29, 32)$.

Q41. Pour déterminer le germe d'une convolée de deux suites périodiques de période N, il faut,*a priori,* $N \times (N-1) \times N = N^2(N-1)$ opérations. En effet, pour chacun des N termes du germe, il y a $N-1$ additions et pour chaque terme de la somme, une multiplication.
C'est à dire un ordre de complexité équivalent à N^3 à l'infini.

Q42. Soient u et v deux suites périodiques de période N.
Soit $p \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}_p &= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p2\pi n/N}\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left(u_k\left(\sum_{n=0}^{N-1} v_{n-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p2\pi n/N}\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left(u_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p2\pi k/N}\left(\sum_{n=0}^{N-1} v_{n-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p2\pi(n-k)/N}\right)\right)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p2\pi k/N}\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} v_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p2\pi n/N}\right)\\
&= \hat{u}_p \times \hat{v}_p
\end{aligned}$$

Q43. En utilisant à la fois la transformée de Fourier rapide, le résultat de la question 42 et la formule d'inversion, donner, lorsque $N = 2^j$, un majorant (dépendant de N) du nombre d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes, divisions d'un nombre complexe par un entier naturel) utilisées pour calculer efficacement le germe de la convolée circulaire de deux suites périodiques de période N.