CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI

2022

4 heures Calculatrice autorisée

Notations

Si $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ avec $a\leqslant b$, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers relatifs compris entre a et b.

Si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ désigne son conjugué et $|z|$ son module.

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note $\omega=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}$.

$\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille N à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et I_N désigne la matrice identité d'ordre N.

Si $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ est une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, la matrice $\bar{A}=(\bar{a}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A.

On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π périodiques et continues sur $\mathbb{R}$.

Rappels

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0_{2\pi}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout entier k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} a_k(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t,\\ b_k(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t.\end{cases}$$

Structure et objectifs du problème

Ce problème est composé de cinq parties largement indépendantes.

La première partie consiste à établir quelques calculs utiles dans tout le problème et à étudier le comportement asymptotique des coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ supposée de classe C^1. La partie II traite de questions d'algèbre linéaire ; le résultat de l'une d'elles pourra être utilisé dans la partie III. La partie III s'intéresse à l'échantillonnage d'un signal continu et à une application, appelée transformation de Fourier discrète, qui permet le traitement d'un signal numérique à partir d'un échantillon. La partie IV est consacrée à l'étude d'un algorithme rapide de calcul d'une transformée de Fourier discrète et au calcul de sa complexité. Enfin, la partie V étudie un opérateur sur l'ensemble des suites périodiques et fournit une application des résultats obtenus dans les parties précédentes.

L'algorithme de transformée de Fourier rapide (Cooley et Tukey, 1965) est, entre autres, à la base des techniques de compression numérique ayant conduit au format JPEG.

I Première partie

I.A – Calculs préliminaires

Q 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^N=1$. On exprimera les solutions à l'aide du nombre ω.

Q 2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs j tels que $\omega^j=1$.

Q 3. Démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\omega^k}=\bar{\omega}^k$.

Q 4. Soit q un nombre complexe et N un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} q^n$. On distinguera les cas $q=1$ et $q\neq 1$.

Q 5. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{rn}$, dans les trois cas

$$r=0,\qquad r\in[\![1,N-1]\!],\qquad r\in[\![-(N-1),-1]\!].$$

I.B – Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

À toute fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on associe la suite $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$, à valeur dans $\mathbb{C}$, définie par $c_0(f) = a_0(f)$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} c_k(f) = \dfrac{1}{2}\big(a_k(f) - \mathrm{i}b_k(f)\big), \\ c_{-k}(f) = \dfrac{1}{2}\big(a_k(f) + \mathrm{i}b_k(f)\big). \end{cases}$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

La suite $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ s'appelle la suite des *coefficients de Fourier exponentiels* de la fonction f. Cette notation est utilisée tout au long du problème.

Q 7. *Question de cours* : citer le théorème de Parseval pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q 8. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $|c_k(f)|^2$ et $|c_{-k}(f)|^2$ en fonction de $a_k^2(f)$ et $b_k^2(f)$ et, en utilisant le théorème de Parseval, démontrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k(f) = \lim\limits_{k\to+\infty} c_{-k}(f) = 0$.

Dans les trois questions suivantes, f est une fonction 2π périodique, de classe C^1, à valeurs réelles.

Q 9. Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'existence de $a_k(f')$ et $b_k(f')$.

Q 10. À l'aide d'intégrations par parties, démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\begin{cases} a_k(f') = kb_k(f), \\ b_k(f') = -ka_k(f). \end{cases}$$

En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $c_k(f') = \mathrm{i}kc_k(f)$.

Q 11. En déduire que $|c_k(f)| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et $|c_{-k}(f)| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

II Diagonalisation des matrices circulantes

On rappelle que N est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour $(a_0, a_1, ..., a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, on considère la matrice

$$C(a_0, a_1, ..., a_{N-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}).$$

II.A – Étude du cas $N = 3$

On note $G_3 = C(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Q 12. Montrer que G_3 est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Identifier géométriquement l'isométrie canoniquement associée à la matrice G_3 (on précisera ses éléments caractéristiques).

Q 13. Calculer le polynôme caractéristique de G_3. Montrer que la matrice G_3 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q 14. Déterminer une matrice P_3 inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $D_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale telles que $G_3 = P_3 D_3 P_3^{-1}$.

Q 15. Pour tout $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3$ exprimer $C(a_0, a_1, a_2)$ à l'aide de I_3, G_3 et G_3^2 et en déduire que $C(a_0, a_1, a_2)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

II.B – Étude du cas général

On note $G_N = C(0, 1, 0, ..., 0) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_N)$ de $\mathbb{C}^N$ est G_N.

Q 16. Montrer que le polynôme caractéristique de G_N est $X^N - 1$.

Q 17. G_N est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$? Justifier.

On note

$$P_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont, pour tout couple $(r,s) \in [\![1,N]\!]$, le coefficient situé à la ligne r et à la colonne s est égal à $\omega^{(r-1)(s-1)}$.

On rappelle que ω a été défini dans les notations par $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}$.

Pour $k \in [\![1,N]\!]$, on note C_k la k-ième colonne de la matrice P_N.

Q 18. Calculer le produit matriciel $G_N C_k$. Démontrer que ω^k est une valeur propre de G_N et donner un vecteur propre associé.

Q 19. En déduire que la famille des vecteurs colonnes $(C_1, C_2, \dots, C_N)$ est libre, puis que la matrice P_N est inversible.

Q 20. Calculer le produit matriciel $P_N \overline{P_N}$ et en déduire que $P_N^{-1} = \dfrac{1}{N}\overline{P_N}$.

Q 21. Pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, exprimer $g(e_j)$ en fonction des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$. On distinguera le cas $j = 1$.

Q 22. Pour tout $k \in [\![1,N-1]\!]$ et tout $j \in [\![1,N]\!]$, exprimer $g^k(e_j)$ en fonction des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$. On distinguera les cas $j > k$ et $j \leqslant k$.

Q 23. En déduire, pour tout $k \in [\![0,N-1]\!]$, l'expression de G_N^k comme une matrice $C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ particulière. (On rappelle que $G_N^0 = I_N$).

Q 24. En exprimant $C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ comme combinaison linéaire de $G_N^0, G_N^1, \dots, G_N^{N-1}$ et en utilisant les questions précédentes, justifier que $C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Donner sa réduite diagonale et une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Q 25. À l'aide du résultat précédent, calculer le déterminant de la matrice $C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$.

III Discrétisation et transformée de Fourier discrète

On appelle échantillon de taille N un N-uplet de $\mathbb{R}^N$.

Pour un signal continu variant dans le temps, l'échantillonnage consiste à prélever un nombre fini de valeurs de ce signal, à intervalles fixes, souvent réguliers.

III.A – Approximation des coefficients de Fourier

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Le N-uplet $\left(f\left(\dfrac{2n\pi}{N}\right)\right)_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$ est un échantillon de ce signal.

On pose $a'_0(N) = c'_0(N) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\dfrac{2\pi n}{N}\right)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a'_k(N) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\cos\left(k\frac{2n\pi}{N}\right)$$

$$b'_k(N) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\sin\left(k\frac{2n\pi}{N}\right)$$

$$c'_k(N) = \frac{1}{2}\big(a'_k(N) - \mathrm{i}b'_k(N)\big)$$

$$c'_{-k}(N) = \frac{1}{2}\big(a'_k(N) + \mathrm{i}b'_k(N)\big)$$

Afin d'alléger les notations, on notera respectivement a_k, b_k et c_k les coefficients de Fourier $a_k(f)$, $b_k(f)$ et $c_k(f)$.

Q 26. Justifier, en explicitant le théorème utilisé, que $\lim\limits_{N\to+\infty} a'_0(N) = a_0$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{N\to+\infty} a'_k(N) = a_k$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} b'_k(N) = b_k$.

Q 27. En déduire que, pour tout entier relatif k, $\lim\limits_{N\to+\infty} c'_k(N) = c_k$.

De ce fait, pour de grandes valeurs de N, on prendra le nombre $c'_k(N)$ comme une approximation du coefficient de Fourier c_k.

III.B – Formule d'inversion

Si $u = (u_n)_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$ est un échantillon de taille N, on définit $\hat{u} = (\hat{u}_k)_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ par

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], \qquad \hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi n/N}. \tag{III.1}$$

L'échantillon $\hat{u}$ s'appelle la transformée de Fourier d'ordre N de l'échantillon u.

Q 28. Combien d'opérations (additions et multiplications entre nombres complexes) sont nécessaires pour calculer les N termes de la transformée de Fourier $\hat{u}$, connaissant ceux de l'échantillon u et les nombres $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi n/N}$? Parmi les multiplications, on ne comptabilise pas celles dont l'un des facteurs est égal à 1.

Q 29. Démontrer que

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], \qquad u_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi n/N}. \tag{III.2}$$

On pourra donner une écriture matricielle des N égalités (III.1) et utiliser la question 20.

Les N égalités (III.2), connues sous le nom de *formule d'inversion de Fourier*, permettent de reconstruire l'échantillon u à partir de sa transformée de Fourier $\hat{u}$.

Q 30. Montrer que, pour tout $\ell \in [\![1, N-1]\!]$, $\overline{\hat{u}_\ell} = \hat{u}_{N-\ell}$.

On suppose dans la question suivante que l'entier naturel N est pair.

Q 31. Combien suffit-il d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes et conjugaison d'un nombre complexe) pour calculer les N termes de la transformée de Fourier $\hat{u}$, connaissant ceux de l'échantillon u de taille N et les nombres $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi n/N}$?

Q 32. Donner un équivalent de ce nombre d'opérations lorsque N tend vers $+\infty$.

IV Transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide est un algorithme dont l'objectif est d'améliorer le temps de calcul des termes de la transformée de Fourier $\hat{u}$, connaissant ceux de l'échantillon u.

Dans cette partie, on suppose que u est un échantillon dont la taille N est une puissance de 2 ; on écrit donc $N = 2^j$, $j \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}$.

Pour tout entier r compris entre 0 et $\dfrac{N}{2} - 1$, on pose $y_r = u_{2r}$ et $z_r = u_{2r+1}$ ce qui définit deux échantillons y et z de taille $\dfrac{N}{2}$.

Q 33. Montrer que $\hat{u}_{N/2} = \hat{y}_0 - \hat{z}_0$.

Q 34. Montrer que,

$$\forall k \in [\![0, \frac{N}{2} - 1]\!], \qquad \begin{cases} \hat{u}_k = \hat{y}_k + \bar{\omega}^k \hat{z}_k, \\ \hat{u}_{k+N/2} = \hat{y}_k - \bar{\omega}^k \hat{z}_k. \end{cases}$$

On note $T(N)$ le nombre d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes) nécessaires pour calculer selon cette méthode les N termes de la transformée de Fourier d'ordre N d'un échantillon u de taille N connaissant les termes de cet échantillon et les $\bar{\omega}^k$.

Q 35. Justifier que $T(2) = 3$ et démontrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2,

$$\forall r \in [\![2, j]\!], \qquad T(2^r) \leqslant 2T(2^{r-1}) + 4 \times 2^{r-1}.$$

Q 36. Démontrer que

$$T(N) \leqslant \frac{2}{\ln 2} N \ln N.$$

On pourra utiliser la suite auxiliaire $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant j}$, définie par $t_k = \dfrac{T(2^k)}{2^k}$.

Q 37. Expliquer pourquoi cette méthode est qualifiée de transformée de Fourier « rapide ».

V Convolution circulaire

Étant donné un échantillon $(u_n)_{0 \leqslant n \leqslant N-1} \in \mathbb{R}^n$, on appelle suite périodisée, indexée par $\mathbb{Z}$, de germe $(u_n)_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifiant, pour tout entier relatif n, $u_{n+N} = u_n$.

On admet que la donnée d'un germe $(u_n)_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$ permet de définir une unique suite périodisée $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

À titre d'exemple, à partir du germe $(2, 4, 7, 9)$, on définit, dans $\mathbb{Z}$, la suite de période 4 $(..., 4, 7, 9, 2, 4, 7, 9, 2, 4, 7, 9, 2, ...)$.

Les définitions de somme, produit par un nombre réel et produit de suites définies sur $\mathbb{N}$ se prolongent naturellement aux suites définies sur $\mathbb{Z}$.

Q 38. Étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ périodique de période N, démontrer que, pour tout entier relatif $p \in [\![-N+1, 0]\!]$,

$$\sum_{k=p}^{p+N-1} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k.$$

À deux suites périodiques de même période N, on associe la suite $u * v$, appelée convolée circulaire des suites u et v, définie par $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(u * v)_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k}$.

Q 39. Montrer que la convolée circulaire de deux suites périodiques de période N est une suite périodique de période N.

Q 40. On considère les suites r et s périodiques de période 3, dont les germes sont $r = (1, 2, 3)$ et $s = (6, 5, 4)$. Donner le germe de $r * s$.

Q 41. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont à priori nécessaires pour calculer les N termes $(u * v)_0, (u * v)_1, ..., (u * v)_{N-1}$ à partir de la donnée de $u_0, ..., u_{N-1}$ et $v_0, ..., v_{N-1}$?

On définit la transformée de Fourier discrète d'une suite u périodique de période N comme la suite périodisée de période N dont le germe est la transformée de Fourier discrète $(\hat{u}_0, ..., \hat{u}_{N-1})$ du germe $(u_0, ..., u_{N-1})$ de la suite u.

Q 42. Pour deux suites u et v périodiques de période N, montrer que $\widehat{u * v} = \hat{u}\,\hat{v}$.

Q 43. En utilisant à la fois la transformée de Fourier rapide, le résultat de la question 42 et la formule d'inversion, donner, lorsque $N = 2^j$, un majorant (dépendant de N) du nombre d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes, divisions d'un nombre complexe par un entier naturel) utilisées pour calculer efficacement le germe de la convolée circulaire de deux suites périodiques de période N.

• • • FIN • • •